H. MENZEL & O. ROSENBACH

BEMERKUNG ÜBER DEN EINFLUSS DER VERWITTERUNGSSCHICHT AUF DAS SPEKTRUM SEISMISCHER WELLEN

Sonderdruck aus der Zeitschrift
GEOFISICA PURA E APPLICATA - MILANO
Bd. 40 (1958/II), S. 36-40

BEMERKUNGEN ÜBER DEN EINFLUSS DER VERWITTERUNGSSCHICHT AUF DAS SPEKTRUM SEISMISCHER WELLEN

von Heinz Menzel (*) & Otto Rosenbach (**)

Zusammenfassung — In Fortführung einer früheren Arbeit der Autoren werden einige weitere theoretische Untersuchungen skizziert, bei denen die elastischen Eigenschaften der Verwitterungschicht geeignet abgeändert sind. Bei Anregung der Schicht durch einen momentanen Impuls (Nadelimpuls) ergibt sich, daß die Frequenz der seismischen Welle nicht durch den Gradienten der Geschwindigkeit, sondern durch den Gradienten des Schallwiderstandes bestimmt wird.

Summary — Continuating an earlier paper the authors present some further theoretical investigations on the influence of the weathering layer; the assumptions with regard to the elastic nature of the layer are properly modified. The result is as follows: If the layer is acted on by a momentary pulse (needle pulse) then the frequency of the seismic wave is determined by the gradient of the acoustical resistance, not by the gradient of the velocity of propagation.

1. *Einleitung und Problemstellung* — In einer früheren Arbeit ([1]) haben die Autoren den Einfluß einer Schicht mit stetig veränderlicher Geschwindigkeit auf das Spektrum seismischer Wellen theoretisch untersucht. Dabei sind die Eigenschaften der Schicht durch die nachstehend aufgeführten Annahmen dargestellt worden, die als Fall I bezeichnet werden sollen:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(1-a)} & \lambda + 2\mu = \rho_0 (v_0 + \delta z)^2 \\ \text{(1-b)} & \rho = \rho_0 , \\ \text{so daß} & \\ \text{(1-c)} & v = \sqrt{\dfrac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = v_0 + \delta z . \end{array}\right\} \text{I}$$

(*) Geophysikalisches Institut der Bergakademie *Clausthal*; Freier wissenschaftlicher Mitarbeiter der Prakla, Gesellschaft für praktische Lagerstättenforschung GmbH., *Hannover*.

(**) Institut für Meteorologie und Geophysik der Universität *Mainz*; Freier wissenschaftlicher Mitarbeiter der Prakla, Gesellschaft f. praktische Lagerstättenforschung GmbH., *Hannover*.

In diesen Formeln bedeuten

λ, μ = die Laméschen Parameter,

ρ_0, v_0, δ = Konstante,

z = die vertikale Ortskoordinate, positiv nach unten gerechnet,

ρ = die Dichte,

v = die Fortpflanzungsgeschwindigkeit elastischer Kompressionswellen.

Die Annahmen (1-*a*), (1-*b*) sind in der zitierten Arbeit deshalb gemacht worden, weil die Untersuchung dann ohne größere mathematische Schwierigkeiten durchführbar ist. Die dort angewandte mathematische Analyse kann nun mit unwesentlichen Modifikationen bei der Behandlung von zwei weiteren Fällen benutzt werden, die etwas allgemeiner sind. Diese beiden Fälle II und III werden durch folgende Gesetze dargestellt:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{(2-a)} & & \lambda + 2\mu = \rho_0 v_0^2 \left(1 + \dfrac{\delta}{v_0} z\right)^{n+2}, \quad n \geq 0 \\ \text{(2-b)} & & \rho = \rho_0 \left(1 + \dfrac{\delta}{v_0} z\right)^{n}, \\ \text{(2-c)} & \text{d.h.} & v = v_0 + \delta z \end{array}\right\} \text{II}$$

und

$$\left.\begin{array}{lll} \text{(3-a)} & & \lambda + 2\mu = \rho_0 (v_0 + \delta_2 z)^2 \\ \text{(3-b)} & & \rho = \rho_0 \left(\dfrac{v_0 + \delta_2 z}{v_0 + \delta_1 z}\right)^2, \\ \text{(3-c)} & \text{d.h.} & v = v_0 + \delta_1 z\,. \end{array}\right\} \text{III}$$

Ersichtlich geht II für $n = 0$, III für $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ in den bereits untersuchten Fall I über.

Die Berechnung der Verschiebung $w(z, t)$ ist in den hier zu behandelnden Fällen II und III im Prinzip ganz genau so durchzuführen wie bei I in der eingangs angeführten Arbeit. Dort ist die Voraussetzung gemacht worden, daß die seismische Welle durch einen momentanen Impuls (Nadelimpuls) angeregt wird. Das Hauptergebnis jener Arbeit besteht in der Feststellung, daß das Medium in jedem seiner Punkte nach Durchgang des Impulses mit einer gedämpften quasiperiodischen Schwingung ausschwingt. Die Frequenz f dieser Schwingung hängt mit dem Geschwindigkeitsgradienten δ durch die Gleichung

$$f = \frac{1}{4\pi}\,\delta \tag{4}$$

zusammen.

2. *Skizzierung des Falles II* — Für den Fall II nach (2-a) bis (2-c) sind die Verhältnisse qualitativ dieselben wie bei I. An Stelle von (4) ergibt sich dann aber

$$f = \frac{n+1}{4\pi}\,\delta\,, \tag{5}$$

woraus für $n = 0$ Gleichung (4) folgt, wie es natürlich sein muß.

Gleichung (5) scheint in zweierlei Hinsicht von Interesse zu sein. Erstens braucht der Geschwindigkeitsgradient δ nicht so groß wie bei (4) zu sein, um die

oft zu beobachtende Frequenz von 50 Hz zu erklären. Zweitens zeigt (5), daß die Frequenz nicht nur vom Gradienten der Geschwindigkeit abhängt.

Im Falle der Gleichung (5) ist die Frequenz dem Gradienten des Schallwiderstandes $W = \rho v$ proportional. Aus (2-b) und (2-c) folgt nämlich:

$$W = \rho_0 v_0 \left(1 + \frac{\delta}{v_0} z\right)^{n+1}, \tag{6}$$

also:

$$\left[\frac{dW}{dz}\right]_{z=0} = \rho_0 (n + 1) \delta . \tag{7}$$

Führt man die Kreisfrequenz ω an Stelle von f ein, so läßt sich (5) in der Form schreiben:

$$\omega = v_0 \left[\frac{dW/dz}{2W}\right]_{z=0}. \tag{8}$$

Natürlich gilt diese Gleichung auch für $n = 0$.

Nun wird bekanntlich der Reflexionskoeffizient r definiert durch:

$$r = \frac{W_2 - W_1}{W_2 + W_1}, \tag{9}$$

wenn W_1 und W_2 die Schallwiderstände beiderseits einer Grenzfläche bezeichnen, an der sich der Schallwiderstand unstetig ändert. Das Analogon zu r im Falle einer stetigen Änderung von W wäre $(1/2W)(dW/dz)$ multipliziert mit einer Länge, damit die so definierte Größe dimensionslos ist wie r. Die natürliche Länge ist die Wellenlänge Λ. Also werde definiert:

$$r = \frac{1}{2W} \frac{dW}{dz} \Lambda \tag{10-a}$$

oder

$$r = \frac{1}{2W} \frac{dW}{dz} \frac{v}{f} . \tag{10-b}$$

Gleichung (8) kann damit folgendermaßen geschrieben werden:

$$[r]_{z=0} = r_0 = 2\pi . \tag{11}$$

Führt man zur Abkürzung die Größe

$$\omega^* = \frac{v}{2W} \frac{dW}{dz} = rf = \frac{r\omega}{2\pi} \tag{12}$$

ein, so nimmt Gleichung (8) die Form

$$\omega = [\omega^*]_{z=0} = \omega_0^* \tag{13}$$

an.

3. *Skizzierung des Falles III* — Die Behandlung des Falles III nach (3-a) bis (3-c) kann mit derselben Methode erfolgen, die in der eingangs zitierten Arbeit ausführlich dargestellt worden ist. Man erhält als Lösung für die Verschiebung

$w(z, t)$ wieder ein Integral in der komplexen ω-Ebene, dessen Integrand dieselben Verzweigungspunkte hat wie dort. Man muß nur δ durch δ_1 ersetzen. Außerdem tritt aber noch ein Pol bei

$$\omega_p = i\delta_2 \sqrt{1 - \delta_1/\delta_2} \tag{14}$$

auf. Auch der Integrand, welcher in der zitierten Arbeit betrachtet worden ist, hat einen Pol, der bei $\omega_p = 0$ liegt. Seine Berücksichtigung hat dort keine Schwierigkeiten verursacht, da er auf dem Verzweigungschnitt liegt. Der durch (14) dargestellte Pol liegt nicht auf dem Verzweigungschnitt. Seine Berücksichtigung verursacht aber auch keine grundsätzlichen Schwierigkeiten. Daher kann von einer expliziten mathematischen Behandlung dieses Falles hier abgesehen werden. Lediglich das Prinzip der Berechnung soll angegeben werden.

Im Falle I tritt ein Integral der Form

$$F_1 = \oint \exp\left[i\left(\sigma\theta - \sqrt{\sigma^2 - 1}\,\tau\right)\right] \frac{R(\sigma)}{\sigma}\, d\sigma \tag{15}$$

auf, wobei $R(\sigma)$ eine ganze rationale Funktion und $\sigma = 2\omega/\delta$ ist. An Stelle von (15) ergibt sich nun im Falle III ein Integral der Form

$$F_2 = \oint \exp\left[i\left(\sigma\theta - \sqrt{\sigma^2 - 1}\,\tau\right)\right] \frac{R(\sigma)\, d\sigma}{\sigma - 2i\dfrac{\delta_2}{\delta_1}\sqrt{1 - \delta_1/\delta_2}}, \quad \sigma = 2\omega/\delta_1 . \tag{16}$$

Aus (15) folgt durch Differentiation

$$\frac{dF_1}{d\theta} = i \oint \exp\left[i\left(\sigma\theta - \sqrt{\sigma^2 - 1}\,\tau\right)\right] R(\sigma)\, d\sigma = F_0 . \tag{17}$$

Dieses Integral ist durch eine endliche Reihe von Besselfunktionen darzustellen, wie es in der zitierten Arbeit geschehen ist. F_0 ist quasi-periodisch mit der Frequenz $\omega = \delta/2$.

Im Falle III leitet man aus (16) die Differentialgleichung

$$\frac{dF_2}{d\theta} + 2\frac{\delta_2}{\delta_1}\sqrt{1 - \frac{\delta_1}{\delta_2}}\, F_2 = F_0 \tag{18}$$

ab, wobei F_0 wieder durch (17) definiert wird und quasi-periodisch mit der Frequenz

$$\omega = \delta_1/2 \tag{19}$$

ist. Die Differentialgleichung (18) kann durch die Methode der Variation der Konstanten ohne weiteres gelöst werden. Das Ergebnis ist eine Schwingung, in der sich die durch (19) und (14) dargestellten Frequenzen überlagern. Da man im allgemeinen annehmen kann, daß die Dichte mit wachsender Tiefe zunimmt, muß man aus (3-b)

$$\delta_1 < \delta_2 \tag{20}$$

folgern. Aus (14) folgt dann, daß die Frequenz ω_p rein imaginär ist. Ein Term mit der Frequenz ω_p stellt also einen Dämpfungsfaktor dar.

Berechnet man $\omega_0{}^*$ nach Gleichung (12) mit (3-b) und (3-c), so ergibt sich

$$\omega_0{}^* = \delta_2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\delta_1}{\delta_2}\right). \tag{21}$$

Ein Vergleich von (14), (19) und (21) liefert

$$\omega^2 = (\omega_0{}^*)^2 + \omega_p^2 . \tag{22}$$

Da (22) für $\omega_p = 0$ in (13) übergeht, gilt (22) also auch in den beiden vorherbehandelten Fällen I und II.

4. *Ein weiterer Fall* — Dieselbe Gleichung (22) gilt auch noch in einem weiteren Falle. Er kann durch

$$\lambda + 2\mu = \rho_0 (v_0 + \delta z)^2 \tag{23-a}$$

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{\delta}{v_0} z\right)^2, \tag{23-b}$$

$$\text{d.h.} \qquad v = v_0 \tag{23-c}$$

dargestellt werden. Die Lösung des Problems ist für diese Daten ganz elementar. Es ergibt sich wieder ein Integral in der komplexen ω-Ebene. Diesmal hat der Integrand aber keine wesentliche Singularität, sondern nur einen Pol bei

$$\omega_p = i\delta . \tag{24}$$

Für $\omega_0{}^*$ nach (12) ergibt sich

$$\omega_0{}^* = \delta . \tag{25}$$

Da $\omega = 0$ gilt, wird durch (24) und (25) also wieder Gleichung (22) erfüllt.

5. *Schlussbemerkung* — In der ersten Arbeit, welche die Autoren über dieses Thema veröffentlicht haben, ist bereits darauf hingewiesen worden, daß zur Erklärung einer Frequenz von etwa 50 Hz ein Geschwindigkeitsgradient von etwa 600 $\sec^{-1}$ erforderlich ist, wenn man die in jener Arbeit behandelten Annahmen über die Eigenschaften des Materials zu Grunde legt. Direkte, zur Prüfung dieser Theorie durchgeführte Messungen der Geschwindigkeit haben nur gelegentlich einen derartig hohen Geschwindigkeitsgradienten ergeben. Die in dieser Arbeit mitgeteilten Überlegungen führen zu dem Schluß, daß die Diskrepanz zwischen Theorie und Beobachtung geringer wird, wenn man etwa von den Gleichungen (2-a) bis (2-c) ausgeht. Hierbei ist aber zu beachten, daß nicht der Gradient der Geschwindigkeit, sondern der des Schallwiderstandes für die Bestimmung der Frequenz des Ausschwingens wesentlich ist. Daher ist es erforderlich, nicht nur die Geschwindigkeit, sondern auch die Dichte als Funktion der Tiefe zu messen, um die Theorie an Beobachtungen zu prüfen. Derartige Messungen sollen in absehbarer Zeit begonnen werden.

Die Autoren sind der Fa. Prakla, Gesellschaft für praktische Lagerstättenforschung G.m.b.H., Hannover, für die gewährte Förderung zur Durchführung der Untersuchung zu großem Dank verpflichtet.

SCHRIFTTUM

(1) H. Menzel & O. Rosenbach, 1957: *Theoretische Untersuchungen über den Einfluss der Verwitterungsschicht auf das Spektrum elastischer Wellen in der Reflexionsseismik.* Geophysical Prospecting 5, Nr. 3, S. 328-348.

(*Eingegangen am* 23. *April* 1958)