ZWEIDIMENSIONALE REKURSIVFILTER

VON

R. MARSCHALL*)

EINLEITUNG

Ideale Filteroperatoren lassen sich sehr anschaulich im Frequenzbereich beschreiben. Mit Hilfe der inversen zweidimensionalen Fouriertransformation erhält man den entsprechenden Filteroperator im Zeitbereich. Da man im Frequenzbereich eine frequenzbandbeschränkte Version vorgibt (wir haben 2 Nyquistfrequenzen $f_{1,Ny}$ und $f_{2,Ny}$), ist der ideale Operator im Zeitbereich jeweils zweiseitig unendlich lang und daher als Idealoperator nicht realisierbar. Für eine reine MA-Realisierung (MA = Moving Average) muß er daher abgeschnitten werden. Diese Beschränkung kann zu erheblichen Abweichungen von dem ursprünglich vorgegebenen Frequenzverhalten führen. Diese Fehlermöglichkeit kann aber vermieden werden durch den Einsatz von zweidimensionalen Rekursivfilterapproximationen.

THEORIE

Für den eindimensionalen Fall liegt ein entsprechender sehr leistungsfähiger Approximationsalgorithmus vor (Marschall 1978, 1980 a, b).

Im folgenden wird dieser Algorithmus auf zweidimensionale Probleme erweitert (Marschall 1980 b, c).

Wir gehen davon aus, daß der vorgegebene ideale Filteroperator $D(Z_1, Z_2)$ bereits im Zeitbereich vorliegt und benutzen die zweidimensionale Z-Transformation zu seiner Darstellung:

$$D(Z_1, Z_2) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} d_{i,j} Z_1^i Z_2^j \tag{1}$$

Dieser Operator wird nun durch den Filteroperator $F(Z_1, Z_2)$ unter Benutzung der L_2-Norm approximiert. Dabei hat $F(Z_1, Z_2)$ folgende Form

$$F(Z_1, Z_2) = \frac{A(Z_1, Z_2)}{B_0(Z_1, Z_2)\, B_0(1/Z_1, 1/Z_2)} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_{i,j} Z_1^i Z_2^j \tag{2}$$

d.h. die Approximation wird durchgeführt, indem man das Nennerproblem als *separierbaren* Minimum Delay Operator definiert, der als Gesamtoperator die Nullphaseneigenschaft aufweist. Dabei ist

$$B_0(Z_1, Z_2) = B_0^{(1)}(Z_1)\, B_0^{(2)}(Z_2) = \sum_{i=0}^{M_b-1} b_i^{(1)} Z_1^i \cdot \sum_{j=0}^{N_b-1} b_j^{(2)} Z_2^j \tag{3}$$

*) PRAKLA-SEISMOS GmbH, Hannover

Dieser Ansatz hat den Vorteil, daß keinerlei Stabilitätsprobleme auftreten können.

Ist nun der vorgegebene Idealoperator separierbar, so muß auch der ermittelte Approximationsoperator separierbar sein. Für diesen Fall gilt dann

$$A(Z_1, Z_2) = \sum_{i=-M_a}^{M_a} \sum_{j=-N_a}^{N_a} a_{i,j} Z_1^i Z_2^j = A(Z_1) \cdot A(Z_2) \tag{4}$$

Ist jedoch der vorgegebene Idealoperator nicht separierbar, dann ist der Zähler des Approximationsoperators ebenfalls nicht separierbar.

In diesem Fall ist es oft zweckmäßig, den sich ergebenden Zähleroperator $A(Z_1, Z_2)$ weiter zu approximieren mit Hilfe eines Diagonaloperators $DIAG(Z_1, Z_2)$:

$$A(Z_1, Z_2) = \frac{A(Z_1, Z_2)}{DIAG(Z_1, Z_2)\, DIAG(1/Z_1, 1/Z_2)} = \sum_{i=-\bar{M}a}^{\bar{M}a} \sum_{j=-\bar{N}a}^{\bar{N}a} a'_{i,j} Z_1^i Z_2^j, \tag{5}$$

wobei der minimalphasige Diagonaloperator dann definiert ist zu

$$DIAG_0(Z_1, Z_2) = \sum_{i=0}^{Mc-1} \sum_{j=0}^{Nc-1} c_{i,j} Z_1^i Z_2^j \tag{6}$$

mit

$$\begin{aligned} DIAG(Z_1, Z_2) &= DIAG_0^{(1)}(Z_1, Z_2)\, DIAG_0^{(2)}(Z_1, Z_2) = \\ &= \sum_{i=0}^{M_d-1} d_i^{(1)} Z_1^{-i} Z_2^{-i} \sum_{j=0}^{N_d-1} d_j^{(2)} Z_1^j Z_2^j \end{aligned} \tag{7}$$

Aus dem so beschriebenen Ansatz ergibt sich sofort, daß das Phasenverhalten des Approximationsoperators das ideale Phasenverhalten darstellt und wir nur mehr das entsprechende Frequenzspektrum überprüfen müssen.

Die praktische Durchführung ist wie folgt:

Man wählt eine bestimmte*) Operatorlänge M_b bzw. N_b und führt die erste Approximation längs der Hauptachsen des vorgegebenen Idealoperators durch. Die Korrelation mit diesem so ermittelten Operator $B_0(Z_1, Z_2)\, B_0(1/Z_1, 1/Z_2)$ ergibt dann

$$Z_1^{Ma} Z_2^{Na} D(Z_1, Z_2) B_0(Z_1, Z_2) B_0(1/Z_1, 1/Z_2) = Q_1^-(Z_1, Z_2) + P_1^+(Z_1, Z_2) \tag{8}$$

wobei nach entsprechender Wahl von M_a bzw. N_a gilt

$$P_1^+(Z_1, Z_2) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j} Z_1^i Z_2^j \tag{9}$$

$$\begin{aligned} Q^-(Z_1, Z_2) = &\sum_{i=-\infty}^{-1} \sum_{j=-\infty}^{-1} q_{i,j} Z_1^i Z_2^j + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{-1} q_{i,j} Z_1^i Z_2^j + \\ &+ \sum_{i=-\infty}^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} q_{i,j} Z_1^i Z_2^j \end{aligned} \tag{10}$$

*) Das wird im nachfolgenden Beispiel noch gezeigt.

Damit ergibt sich der Zähleroperator zu

$$A(Z_1, Z_2) = \sum_{i=-M_a}^{M_a} \sum_{j=-N_a}^{N_a} a_{i,j} Z_1^i Z_2^j \tag{11}$$

Wie eingangs erwähnt, ist es für den nicht separierbaren Fall oft zweckmäßig, auch eine Diagonaloperatorapproximation durchzuführen. Nach Wahl des entsprechenden M_c bzw. N_c erhält man hier nach der zusätzlichen Korrelation entsprechend

$$\begin{aligned} &D(Z_1, Z_2)\, B_0(Z_1, Z_2)\, B_0(1/Z_1, 1/Z_2)\, \mathrm{DIAG}(Z_1, Z_2)\, \mathrm{DIAG}(1/Z_1, 1/Z_2) = \\ &= Q_2^-(Z_1, Z_2) + P_2^+(Z_1, Z_2) \end{aligned} \tag{12}$$

und daraus für den Zähleroperator $A'(Z_1, Z_2)$

$$A'(Z_1, Z_2) = \sum_{i=-M_a}^{M_a} \sum_{j=-N_a}^{N_a} a_{i,j} Z_1^i Z_2^j \tag{13}$$

Abschließend sei vermerkt, daß es für die seismische Anwendung wohl vorteilhafter ist, auf die zusätzliche Diagonaloperatorapproximation zu verzichten. Man erhöht dann zweckmäßigerweise den zu wählenden Wert für M_a bzw. N_a. Der Grund hierfür liegt in der Tatsache, daß bei der üblichen digitalen Verarbeitung seismischer Spuren die Spuren immer als Vektoren auftreten und man aus organisatorischen Gründen die entsprechenden Filteroperatoren ebenfalls als eindimensionale Vektoren anwenden will. Der Diagonaloperator ist ein array-orientierter Operator und kann daher zu Speicherproblemen führen.

Außerdem sei noch angeführt, daß bei einer Fächerfilterung von Einzelseismogrammen eine Diagonaloperatorapproximation nicht verwendbar ist. Für Stapelsektionen hingegen ist sie aber durchaus interessant.

ANWENDUNGSBEISPIELE
SEPARIERBARE ZWEIDIMENSIONALE FILTER

Ein sehr simples Beispiel hierfür ist das BOXCAR-Filter, das im Frequenzbereich folgende Charakteristik aufweist: (Rabiner et al. 1975)

$$D(f_1, f_2) = \begin{cases} 1 \ldots -a \leqq w_1 \leqq a \ \wedge \ -b \leqq w_2 \leqq b \\ 0 \ldots \text{andernfalls} \end{cases} \tag{14}$$

Die Rücktransformation in den Zeitbereich liefert

$$\begin{aligned} d(n_1, n_2) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-b}^{b} \int_{-a}^{a} e^{jw_1 n_1} e^{jw_2 n_2} dw_1\, dw_2 \\ &= \frac{\sin(an_1)}{\pi \cdot n_1} \cdot \frac{\sin(bn_2)}{\pi \cdot n_2} \end{aligned} \tag{15}$$

Für das folgende numerische Beispiel wurde $a = b = \frac{\pi}{2}$ gewählt (Marschall 1980 c).

Wir wählen $M_b = 5$ und erhalten folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2.5\pi} \\ -\frac{1}{2.7\pi} \\ \frac{1}{2.9\pi} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2.3\pi} & -\frac{1}{2\pi} \\ -\frac{1}{2.5\pi} & \frac{1}{2.3\pi} \\ \frac{1}{2.7\pi} & -\frac{1}{2.5\pi} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_2^{(1)} \\ b_4^{(1)} \end{bmatrix}$$

Das ergibt als Lösung

$$B_0^{(1)}(Z_1) = 1 + 1{,}0166\, Z_1^2 + 0{,}1418\, Z_1^4$$
$$B_0^{(2)}(Z_2) = 1 + 1{,}0166\, Z_2^2 + 0{,}1418\, Z_2^4$$

Die Korrelation mit dem Gesamtoperator ergibt dann den *separierbaren* Zählerarray.

Für das Beispiel wurde die Filterordnung des Zählers zu (11×11) gewählt.

Das resultierende Spektrum ist Abb. 1 zu entnehmen und zeigt, daß die Approximation zu einem sehr guten Filteroperator geführt hat.

Zusätzlich wurde die Impulsantwort des Filters berechnet und in Abb. 2 dargestellt.

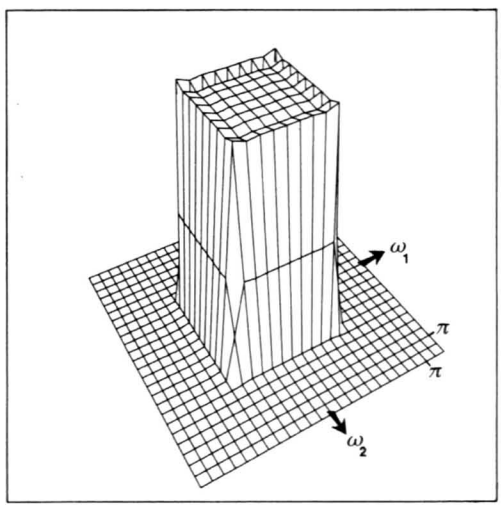

Abb. 1 2D-BOXCAR-Filter, Frequenzspektrum

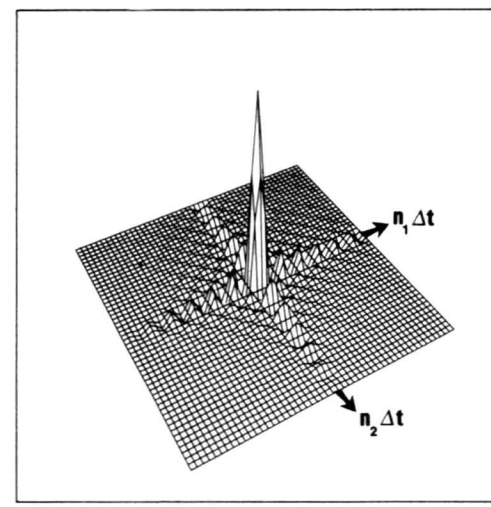

Abb. 2 2D-BOXCAR-Filter, Impulsantwort

Der klassische Fall eines zweidimensionalen nichtseparierbaren Operators stellt das Geschwindigkeitsfilter, auch Fächerfilter genannt, dar (Embree et al. 1968, Kanasewich 1975).

Im Frequenz-Wellenzahlenbereich ergibt sich für das ideale Flächenfilter (90°-Fall)

$$D(f, k) = \begin{cases} 1 \ldots -\frac{|f|}{v} < k < \frac{|f|}{v} \\ 0 \ldots \text{andernfalls} \end{cases} \tag{16}$$

wobei k als räumliche Frequenz aufgefaßt wird:

$$k = \frac{|f|}{v} = \frac{K}{2\pi} = \frac{1}{\lambda} \tag{17}$$

mit K = Wellenzahl
λ = scheinbare Wellenlänge
Im Zeitbereich erhält man

$$D(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} D(f, k)\, e^{2\pi i(ft - kx)}\, dk\, df \tag{18}$$

Definiert man $T_n = n \cdot \Delta t$ als n'ten Samplepunkt und $X_m = m \cdot \Delta x$ als m'tes Geophon, so ergibt sich

$$\begin{aligned} D(T_n, X_m) &= \Delta t\, \Delta x \int_{-f_N}^{f_N} \int_{-k}^{k} e^{2\pi i(fT_n - kX_m)}\, dk\, df \\ &= \Delta t\, \Delta x \int_{-f_N}^{f_N} \frac{\sin 2\pi X_m \frac{|f|}{v}}{\pi X_m} \cdot e^{2\pi i f T_n}\, df \\ &= \frac{1}{\pi^2 \cdot \left\{ \left(\frac{X_m}{\Delta x} \right)^2 - n^2 \right\}} . \end{aligned} \tag{19}$$

d.h. eine zeitlich und räumlich symmetrische Impulsantwort.

Dabei zeigt die Hauptachse in T-Richtung ein Koeffizientenverhalten, das der Reihe

$$\frac{1}{1.3}, \frac{1}{3.5}, \frac{1}{5.7}, \frac{1}{7.9}, \ldots$$

entspricht.

Wählt man nun $M_b = 3$, so erhält man folgendes Gleichungssystem für den Operator $B_0^{(1)}(Z_1) =$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{5.7} \\ -\frac{1}{7.9} \\ -\frac{1}{9.11} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3.5} & \frac{1}{1.3} \\ \frac{1}{5.7} & \frac{1}{3.5} \\ \frac{1}{7.9} & \frac{1}{5.7} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \end{bmatrix}$$

Die Gaußtransformation führt zu einem 2×2-Gleichungssystem, aus dem sich der gesuchte Operator bestimmen läßt zu

$$B_0^{(1)}(Z_1) = 1 - 0{,}73895642\, Z_1 + 0{,}06242998\, Z_1^2$$

Eine andere Variante in T-Richtung stellt die Reihe

$1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \ldots$ dar.

Für $M_b = 3$ erhält man dann analog

$$B_0^{(1)}(Z_1) = 1 - 0{,}793331\, Z_1 + 0{,}087769\, Z_1^2.$$

Man erhält für den Fall $M_b = 3$ für den Nenneroperator $B_0^{(1)}(Z_1)\, B_0^{(1)}(1/Z_1)$ eine „Filterordnung" von (5×1)*).

Für die seismische Anwendung wird nun im ersten Schritt auf die weitere Approximation $(B_0^{(2)}(Z_2), \mathrm{DIAG}_0(Z_1, Z_2))$ verzichtet und die Korrelation durchgeführt, um den Zähleroperator $A(Z_1, Z_2)$ zu ermitteln.

Der sich so ergebende Array von Werten wird nun durch entsprechende Wahl von M_a und N_a beschränkt.

In den Abbildungen 3 und 4 werden die resultierenden Operatorspektren gezeigt**).

Abb. 3 erhält man, wenn der Zählerarray $A(Z_1, Z_2)$ auf (11×4) beschränkt wird, und Abb. 4 ergibt sich, wenn man den Zählerarray auf (7×6) beschränkt. Die Gesamtpunktzahl beider Operatoren liegt unter 50.

*) Die erste Zahl gibt die Anzahl der Koeffizienten in T-Richtung und die zweite Zahl die entsprechende Anzahl in X-Richtung an.

**) In allen Beispielen wurde noch ein Antigleichstromfilter miteinbezogen. Filterordnung (3/1) (3/1).

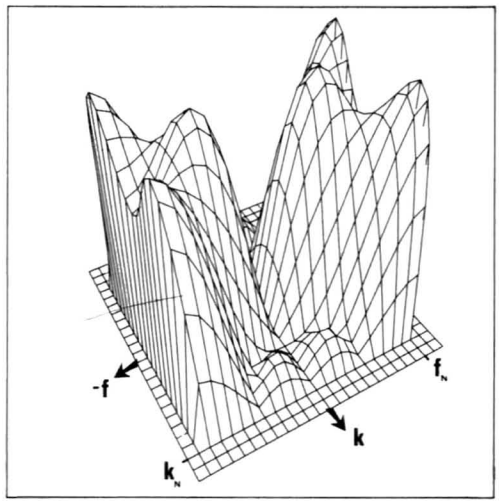

Abb. 3 2D-Fächerfilter, Frequenzspektrum (11/4)/(5/1)

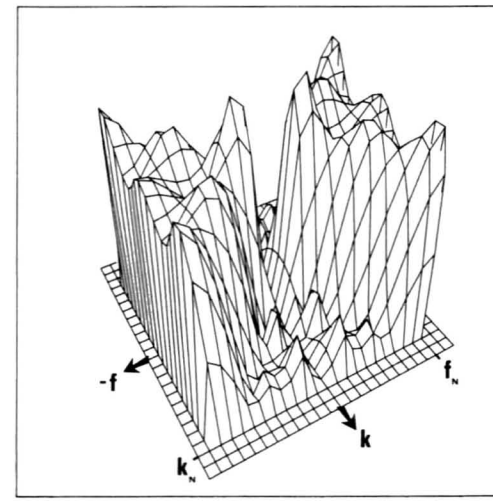

Abb. 4 2D-Fächerfilter, Frequenzspektrum (7/6)/(5/1)

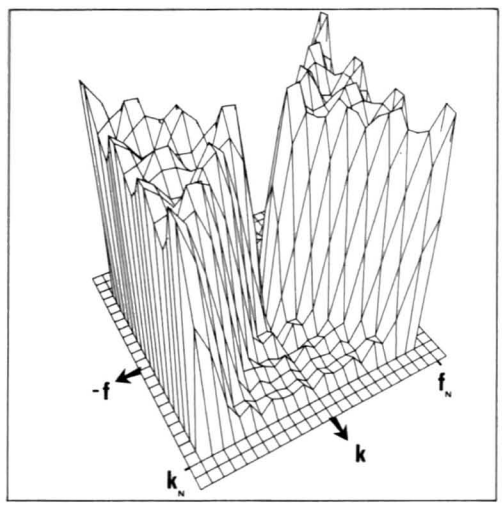

Abb. 5 2D-Fächerfilter, Frequenzspektrum (13/8)/(7/1)

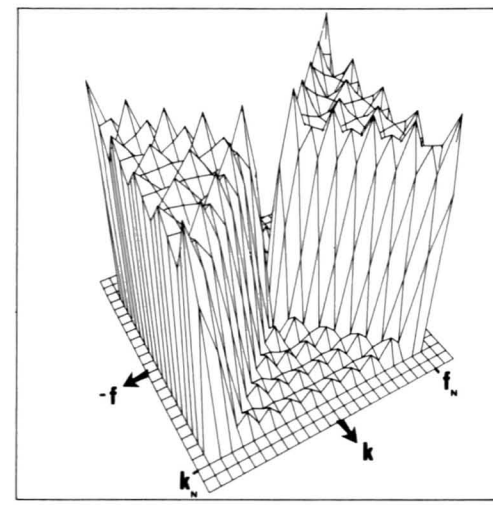

Abb. 6 2D-Fächerfilter, Frequenzspektrum (17/10)/(7/1)

Erhöht man nun jeweils die Filterordnung, d.h. wählt man $M_b = 4$, so führt das auf eine Filterordnung des Nenneroperators von (7×1).

In den Abbildungen 5 und 6 sind wiederum die resultierenden Operatorspektren gezeigt, wobei für Abb. 5 ein Zählerarray von (13×8) und für Abb. 6 von (17×10) gewählt wurde.

Nun gehen wir zu dem Fall über, daß auch eine Diagonaloperatorapproximation durchgeführt werden soll.

Wir behalten $M_b = 3$ bei und führen als ersten Schritt eine Approximation längs der zweiten Hauptsache, d. h. in X-Richtung durch.

Für die X-Richtung ergibt sich ein Koeffizientenverhalten, das der Reihe

$$1, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{5^2}, \frac{1}{7^2}, \ldots .$$

entspricht. Der gesuchte Operator $B_0^{(2)}(Z_2) = 1 + b_1^{(2)} Z_2 + b_2^{(2)} Z_2^2$ wird aus folgendem Gleichungssystem bestimmt:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{5^2} \\ -\frac{1}{7^2} \\ -\frac{1}{9^2} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3^2} & \frac{1}{1^2} \\ \frac{1}{5^2} & \frac{1}{3^2} \\ \frac{1}{7^2} & \frac{1}{5^2} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1^{(2)} \\ b_2^{(2)} \end{bmatrix}$$

Die gesuchte Lösung ist dann

$$B_0^{(2)}(Z_2) = 1 - 0{,}6349276 Z_2 + 0{,}0306403 Z_2^2$$

Der Gesamtoperator für die Vorwärtsrekursion ist dann

$$B_0^{(1)}(Z_1)\, B_0^{(2)}(Z_2) = [1\ Z_1\ Z_1^2] \begin{bmatrix} 1{,}0 & \ldots \\ -0{,}793\ldots & \\ 0{,}087\ldots & \end{bmatrix} [1{,}0 \quad -0{,}634\ldots\ 0{,}030\ldots] \begin{bmatrix} 1 \\ Z_2 \\ Z_2^2 \end{bmatrix}$$

und hat die Filterordnung (5×5).

Korreliert man nun den vorgegebenen Idealoperator mit dem Gesamtnenneroperator $B_0^{(1)}(Z_1)\, B_0^{(2)}(Z_2)\, B_0^{(1)}(1/Z_1)\, B_0^{(2)}(1/Z_2)$, so kann man zeigen, daß der sich daraus ergebende Zähleroperator längs der Hauptdiagonalen ein Koeffizientenverhalten zeigt, das der Reihe

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

entspricht.

Man erhält aus dem sich ergebenden Gleichungssystem dann $(M_d = N_d = 4)$

$$DIAG_0^{(1)}(Z_1, Z_2) = 1 - 1{,}7811\, Z_1 Z_2 + 0{,}9001\, Z_1^2 Z_2^2 - 0{,}1066\, Z_1^3 Z_2^3$$

also formal eine Filterordnung von (4×4).

Der Gesamtnenneroperator ist dann formal (5 × 5, 13 × 13), der rechentechnische Aufwand jedoch ist durch die Separierbarkeit weitaus geringer.

Der nun durch den Korrelationsschritt sich ergebende Zählerarray weist als größten Koeffizienten die Zahl 11,370 auf. Mögliche Beschränkungen des Zählerarrays sind beginnend mit (11 × 6) möglich.

Für Abb. 7 wurde (17 × 16) gewählt. Man sieht, daß durch die Diagonalapproximation eine sehr gute Annäherung an die Idealcharakteristik erreicht worden ist.

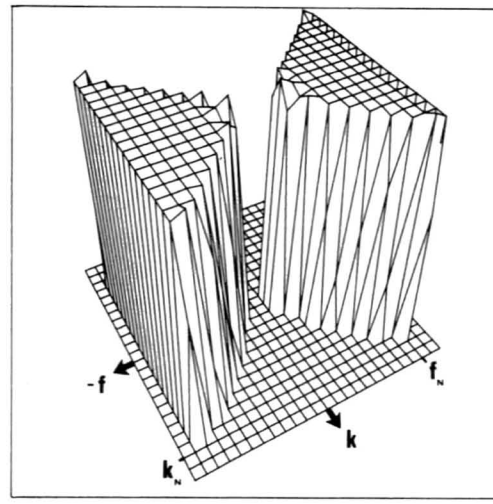

Abb. 7 2D-Fächerfilter, Frequenzspektrum (17/16)/(5/5, 13/13)

ABSCHLIESSENDE BEMERKUNGEN

Das vorgestellte Approximationsverfahren wurde an zwei numerischen Beispielen demonstriert. Die Ergebnisse sind zufriedenstellend und zeigen die Leistungsfähigkeit des Verfahrens.

LITERATURVERZEICHNIS

Embree, P., Burg, J. P., Backus, M. M., 1963, Wide-band velocity-filterung – the pie-slice process: Geophysics, v. 28, p. 948–974.

Kanasewich, E. R., 1975, Time sequence analysis in Geophysics: Edmonton, Canada, University of Alberta Press.

Marschall, R., 1978, Derivation of two-sided recursive filters with seismic applications, 48th annual meeting of the SEG, preprint R-71.

Marschall, R., 1980a, Wavelet processing and the computation of pseudo impedance logs: Norsk Petroleumsforening (NPF) Seminar, Interpretational information from seismic data, Januar 30–February 1, Kristiansand, Norway.

Marschall, R., 1980b, Rekursive Filter in der Prospektionsseismik: Seminar der Arbeitsgruppe: Physik des Erdkörpers, 25.3.–29.3.80, Neustadt/Weinstraße.

Marschall, R., 1980c, Forschungsvorhaben ET-3043A, Quartalsbericht 1.4.–30.6.80.

Rabiner, R. L., Gold, B., 1975, Theory and application of digital signal processing: Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall Inc.