THEORETISCHE UNTERSUCHUNG ÜBER DIE MEHRFACHAUFSTELLUNG VON GEOPHONEN

VON

FRANZ JOSEF KÜPPER

Reprinted from:
GEOPHYSICAL PROSPECTING, Volume VI (1958), No. 3

THEORETISCHE UNTERSUCHUNG ÜBER DIE MEHRFACHAUFSTELLUNG VON GEOPHONEN *

VON

FRANZ JOSEF KÜPPER **

Abstract

The receiving of seismic waves by multiple geophones (geophone-group) is described by a system of coupled differential equations considering only effective resistances. For so-called symmetrical connections of the geophone-group which are used in practice nearly in all cases, a method can be given for solving this system of differential equations. The solutions so derived are valid for seismic waves of any shape. The calculation takes into account the coupling of the geophones as well as the building-up transient oscillations.

A suitable measure of superposition is defined, based on the energy transferred during the receiving of the seismic waves. By this means effects similar to interference are investigated which occur at the geophone-group. As a numerical example calculation is carried out for a geophone-group consisting of three geophones which is excited by impulse-shaped waves of the form of a damped sinusoidal oscillation. The occurring effect of superposition and its dependence on direction are discussed. In the appendix formulae are presented for investigation of further numerical examples.

Zusammenfassung

Der Empfang seismischer Wellen durch mehrfach aufgestellte Geophone (Geophongruppe) wird unter blosser Berücksichtigung von Wirkwiderständen durch ein System gekoppelter Differentialgleichungen beschrieben. Für sogenannte symmetrische Schaltungen der Geophongruppe, die in der Praxis in der Regel allein vorkommen, lässt sich eine Methode zur Lösung dieses Differentialgleichungssystems angeben. Die Lösungen gelten für seismische Wellen beliebiger Form. Die Kopplung der Geophone und alle Einschwingvorgänge sind berücksichtigt.

Von der Energie ausgehend, die beim Empfang der seismischen Wellen umgesetzt wird, erfolgt die Definition eines geeigneten Superpositionsmasses. Mit seiner Hilfe werden interferenzähnliche Effekte bei der Geophongruppe untersucht. Als numerisches Beispiel wird eine Geophongruppe aus drei Geophonen berechnet, die durch impulsförmige Wellen in der Form einer gedämpften Sinusschwingung erregt wird. Der dabei auftretende Superpositionseffekt und seine Richtungsabhängigkeit werden diskutiert. Im Anhang ist Formelmaterial für weitere numerische Rechnungen bereitgestellt.

Einleitung: Aufgabenstellung

In der angewandten Seismik wird fast ausschliesslich die Mehrfachaufstellung von Geophonen angewandt. Es gibt mehrere Gründe, die zu dieser Methode führten. Sie verfolgen alle den Zweck, in den erhaltenen Seismogrammen unerwünschte Störschwingungen abzuschwächen und so die Qualität

* Als Dissertation angenommen von der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Johannes Gutenberg — Universität Mainz.

** Institut für Meteorologie und Geophysik der Johannes Gutenberg — Universität Mainz.

der Seismogramme zu verbessern. Zum Beispiel kann man durch die Mehrfachaufstellung von Geophonen die störende Wirkung der Oberflächenwellen vermindern und das Amplitudenverhältnis von Nutz- zu Störsignal im Seismogramm vergrössern (LOMBARDI 1955). Die Gründe für die Mehrfachaufstellung von Geophonen sollen hier nicht näher behandelt werden. Ein reichhaltiges Literaturverzeichnis über die Verwendung mehrfach aufgestellter Geophone wurde von PARR und MAYNE (1955) angegeben. In der vorliegenden Arbeit wird vielmehr von der Frage ausgegangen, welche Konsequenzen eine gegebene Mehrfachaufstellung für die Registrierung der Reflexionen, also für die Nutzsignale selber nach sich zieht. Von diesem Standpunkt aus behandeln auch HALES und EDWARDS (1955) das gleiche Thema. Jedoch betrachten sie nur den Spezialfall, dass die Geophone durch stationäre, sinusförmige Wellen erregt werden. Demgegenüber ist das Ziel der nachstehenden Untersuchung die grundsätzliche Behandlung der Mehrfachaufstellung "idealer Geophone" [1]) für den Fall beliebiger impulsförmiger Erregung.

1. ABSCHNITT: DAS EINZELNE GEOPHON

1. 1) *Differentialgleichungen des Geophons*

Das in der angewandten Seismik am meisten gebrauchte Geophon besteht im wesentlichen aus einer im Geophongehäuse federnd aufgehängten Tauchspule, die in den Ringspalt eines mit dem Gehäuse fest verbundenen Topfmagneten hineinragt. Die Tauchspule hat die Masse M und kann nur in der vertikalen Richtung um ihre Ruhelage schwingen. Ihre relativ zum Gehäuse gemessene Ausschwingung wollen wir durch die Koordinate x angeben. Das Geophongehäuse sei nun mit dem schwingenden Boden fest verbunden, also starr gekoppelt. Die vertikale Komponente der Verschiebung der Bodenteilchen sei z. Die vertikale Komponente der Bewegung der Tauchspule in einem raumfesten Koordinatensystem ist

$$Z(t) = x(t) + z(t) \tag{1}$$

wo t die Zeit ist. Wenn S die konstante Federsteife der elastischen Bindung der Tauchspule an das Gehäuse ist, so wirkt auf die Spule die Federkraft $-Sx(t)$. Weiter wirkt bei der Bewegung die Reibungskraft $-rdx(t)/dt$, wo r der konstante mechanische Dämpfungsfaktor ist. Bei der Bewegung der Spule halten die Federkraft und die Reibungskraft der Trägheitskraft $Md^2Z(t)/dt^2$ das Gleichgewicht. Es gilt also mit Rücksicht auf (1) für die Geophonspule die Bewegungsgleichung

$$M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + r \frac{d x(t)}{dt} + S x(t) = - M \frac{d^2 z(t)}{dt^2} \tag{2}$$

[1]) Die Erklärung dieses Begriffes erfolgt im Anschluss an Gleichung (8).

Diese Gleichung gilt nur für eine Spule, die nicht stromdurchflossen ist, das heisst bei offenen Geophonklemmen. Der mechanische Dämpfungsfaktor r berücksichtigt dabei auch die elektromagnetische Wirbelstromdämpfung, die bei der Bewegung der Metallteile im Magnetfeld entsteht.

Das radial gerichtete Magnetfeld in dem Ringspalt des Topfmagneten möge am Ort der Tauchspule die konstante Feldstärke H haben. Bei der Bewegung der Spule im Magnetfeld wird in der Spule eine Spannung U induziert von der Grösse

$$U(t) = 2\pi n \rho \mu \mu_0 H \frac{d\,x(t)}{dt} = K \frac{d\,x(t)}{dt} \tag{3}$$

Darin bedeuten n die Anzahl der Spulenwindungen, ρ den Spulendurchmesser, μ die relative Permeabilität von Luft (≈ 1) und μ_0 die absolute Permeabilität des Vakuums. Wenn nun die Geophonklemmen durch einen Stromkreis geschlossen werden, so fliesst in dem Stromkreis, also auch in der Geophonspule ein Strom I, für den die Differentialgleichung gilt:

$$U(t) = L \frac{d\,I(t)}{dt} + R\,I(t) \tag{4}$$

Darin ist L die Gesamtselbstinduktion und R der gesamte Wirkwiderstand des Stromkreises.

Da die in Bewegung befindliche Spule stromdurchflossen ist, wirkt auf sie im Magnetfeld zusätzlich die Kraft

$$2\,\pi n\,\rho\mu\,\mu_0\,H\,I(t) = K\,I(t) \tag{5}$$

Nach der Lenzschen Regel ist diese Kraft immer so gerichtet, dass sie die Ursache des Induktionsstromes, nämlich die Bewegung der Spule zu hemmen sucht. Sie hat also dieselbe Richtung wie die Reibungskraft. Für die Spulenbewegung gilt jetzt statt (2) die Gleichung

$$M \frac{d^2\,x(t)}{dt^2} + r \frac{d\,x(t)}{dt} + S\,x(t) + K\,I(t) = -M \frac{d^2\,z(t)}{dt^2} \tag{6}$$

Mit Rücksicht auf (3) folgt für den Strom im Geophonkreis aus (4)

$$L \frac{d\,I(t)}{dt} + R\,I(t) - K \frac{d\,x(t)}{dt} = 0 \tag{7}$$

In Verbindung mit seinem Stromkreis ist das Geophon ein gekoppeltes, elektromechanisches System, das durch die beiden Differentialgleichungen (6) und (7) vollständig beschrieben wird. In (6) ist $KI(t)$ und in (7) ist $-K\,d\,x(t)/dt$ das Kopplungsglied. K möge die Kopplungskonstante heissen.

1. 2) *„Ideales Geophon" — Anfangsbedingungen*

Für alle folgenden Überlegungen wollen wir nun im Geophonstromkreis die Selbstinduktion L gegenüber dem Wirkwiderstand R so klein annehmen, dass in (4) und (7) das Glied $L\, d\, I(t)/dt$ neben $RI(t)$ vernachlässigt werden kann. Statt (7) gilt dann

$$R\, I(t) - K \frac{d\, x(t)}{dt} = 0 \tag{8}$$

Das ganze Problem ist jetzt statt von der 3. nur noch von der 2. Ordnung. DENNISON (1953) nennt ein Geophon, bei dem diese Bedingung erfüllt ist, ein „ideales Geophon". Durch Elimination von $I(t)$ in (6) mittels (8) folgt jetzt als Bewegungsgleichung für das Geophon:

$$M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \left(r + \frac{K^2}{R}\right) \frac{d\, x(t)}{dt} + S\, x(t) = - M \frac{d^2 z(t)}{d\, t^2} \tag{9}$$

Diese Gleichung hat die übliche Gestalt einer Seismographengleichung. Um sie eindeutig lösen zu können, müssen noch Anfangsbedingungen für die Bewegung festgelegt werden. Die Zeitzählung erfolge so, dass die eigentliche Erregung frühestens zur Zeit $t = 0$ beginnt. Das heisst, $z(t)$ verschwindet identisch für alle negativen t. Vernünftigerweise fordern wir für die Erregungsfunktion, die ja die Bodenbewegung beschreibt, im ganzen Zeitintervall Stetigkeit, also auch im Zeitpunkt $t = 0$. Es gilt dann für die Erregung die Anfangsbedingung:

$$z\,(t) = 0; \quad t \leqslant 0 \tag{10}$$

Weiter wollen wir annehmen, dass die Funktion $z(t)$ und ihre Ableitung $dz(t)/dt$ zu allen Zeiten dem Betrage nach beschränkt sind. Vom physikalischen Standpunkt aus wäre es richtiger, auch für die Ableitung $dz(t)/dt$ Stetigkeit in allen Punkten zu fordern. Dann wäre $z(t)$ eine glatte Funktion. Mit Rücksicht auf spätere Teile der Untersuchung sollen hier jedoch ausdrücklich für $z(t)$ auch Funktionen zugelassen werden, die nur stückweise glatt sind. Physikalisch bedeutet das, dass wir in einzelnen Zeitpunkten die Wirkung unendlich grosser Kräfte vom Boden auf das Geophongehäuse zulassen, was natürlich eine Ungenauigkeit ist. Für uns besteht hier aber nicht die Bewegung des Geophongehäuses durch den Boden als mechanisches Problem, sondern die Bewegung der Geophonspule bei vorgegebener Gehäusebewegung. Der Fall einer glatten Funktion $z(t)$ ist unter den zugelassenen Funktionen ein Spezialfall. Aus (10) folgt jetzt lediglich

$$d\, z(t)/dt = 0; \quad t < 0 \tag{11}$$

Der rechtsseitige Grenzwert $\lim\limits_{t \to +0} dz(t)/dt$ kann sehr wohl von Null verschieden sein.

Die Bewegung $Z(t)$ der Geophonspule gegen ein raumfestes Koordinatensystem verläuft natürlich stetig. Wegen der Stetigkeit von $z(t)$ folgt aus (1) auch die Stetigkeit von $x(t)$. Solange keine Erregung des Systems stattfindet, bleibt die Geophonspule in ihrer Ruhelage. Damit ergibt sich aus (10) für $x(t)$ die Anfangsbedingung

$$x(t) = 0; \quad t \leqslant 0 \tag{12}$$

Unter den für $z(t)$ gemachten Voraussetzungen haben die Kräfte, die auf die Masse der Geophonspule wirken, nämlich die Federkraft $-Sx(t)$ und die Reibungskraft $-r\,d\,x(t)/dt$, aus physikalischen Gründen nur endliche Beträge. Das heisst: Die Funktionen $x(t)$ und $d\,x(t)/dt$ sind zu allen Zeiten dem Betrage nach beschränkt. Daraus folgt, dass die Bewegung $Z(t)$ der Geophonspule im Raume eine glatte Funktion ist. Im allgemeinen Falle ist also wegen (1) $x(t)$ wie $z(t)$ eine nur stückweise glatte Funktion, die an denselben Stellen wie $z(t)$ Ecken hat. Man kann aus (12) entsprechend (11) nur folgern

$$d\,x(t)/dt = 0; \quad t < 0 \tag{13}$$

Der rechtsseitige Grenzwert $\lim\limits_{t \to +0} d\,x(t)/dt$ kann von Null verschieden sein. Da die Bewegung $Z(t)$ der Geophonspule gegen den Raum eine glatte Funktion ist, ist ihre Geschwindigkeit $d\,Z(t)/dt$ in allen Punkten stetig. Wenn man den rechtsseitigen und linksseitigen Grenzwert dieser Geschwindigkeit an einer Eckstelle von $z(t)$ einander gleichsetzt, so ergibt sich wegen (1), dass die Funktion $d\,x(t)/dt$ an denselben Stellen wie $d\,z(t)/dt$ unstetig ist, und zwar springt sie dort um denselben Betrag wie $d\,z(t)/dt$ aber in umgekehrter Richtung. Bei Anwendung auf die Stelle $t = 0$ erhalten wir bei Berücksichtigung von (11) und (13) die noch fehlende Anfangsbedingung zu (9)

$$\lim_{t \to +0} \frac{d\,x(t)}{dt} = - \lim_{t \to +0} \frac{d\,z(t)}{dt} \tag{14}$$

Wenn $z(t)$ an der Stelle $t = 0$ keine Ecke hat, sind natürlich beide Grenzwerte gleich Null.

Nach Lösung der Differentialgleichung (9) berechnet sich die in den Geophonstromkreis induzierte Spannung $U(t)$ nach (3). Man kann nun sagen, dass $U(t)$ nur stetig ist, wenn $z(t)$ eine glatte Funktion ist. Wenn $z(t)$ Eckstellen hat, ändert sich $U(t)$ an diesen Stellen unstetig.

1. 3) *Dimensionsloses Zeitmass — Lösung der Geophongleichung*

Man erreicht eine formale Vereinfachung der Gleichung (9) durch Einführung des Dämpfungsmasses α und der Resonanzkreisfrequenz ω_0 des Geophons, und weiter durch die Einführung eines dimensionslosen Zeitmasses τ. α und ω_0 sind gegeben durch die beiden Gleichungen:

$$\alpha = \frac{1}{2 M \omega_0}\left(r + \frac{K^2}{R}\right); \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{S}{M}} \tag{15}$$

Für die Transformation der Zeitvariablen gilt

$$\tau = \omega_0 t \tag{16}$$

Wenn man $x = x(\tau)$ und $z = z(\tau)$ als Funktionen von τ auffasst und die Differentiation nach τ durch einen Punkt bezeichnet, so ist

$$\frac{dx}{dt} = \omega_0 \dot{x}(\tau); \quad \frac{d^2 x}{d t^2} = \omega_0^2 \ddot{x}(\tau); \quad \frac{d^2 z}{d t^2} = \omega_0^2 \ddot{z}(\tau) \tag{17}$$

Mit diesen Umformungen nimmt jetzt die Geophongleichung (9) die einfache Gestalt an

$$\ddot{x}(\tau) + 2\alpha \dot{x}(\tau) + x(\tau) = -\ddot{z}(\tau) \tag{18}$$

Die Anfangsbedingungen (10), (12) und (14) für die Erregung und für die Bewegung lauten jetzt:

$$\left.\begin{aligned} x(\tau) = z(\tau) &= 0; \quad \tau \leqslant 0 \\ \dot{x}(+0) + \dot{z}(+0) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Dabei bedeutet die Schreibweise bei den Geschwindigkeiten die übliche Abkürzung für die normale Schreibweise der entsprechenden rechtsseitigen Grenzwerte an der Stelle $\tau = 0$.

Wir wollen nun die Differentialgleichung (18) mit Hilfe der Laplace-Transformation $\mathfrak{L}$ lösen. Zuvor seien aber noch einmal die im Abschnitt 1.2 ausführlich besprochenen Eigenschaften der Funktionen $x(\tau)$, $z(\tau)$ und $Z(\tau) = x(\tau) + z(\tau)$ kurz erwähnt: Es sind $x(\tau)$ und $z(\tau)$ stetig, stückweise glatt und dem Betrage nach beschränkt. Die Ableitungen $\dot{x}(\tau)$ und $\dot{z}(\tau)$ sind ebenfalls dem Betrage nach beschränkt. $Z(\tau)$ ist glatt, $\dot{Z}(\tau)$ stetig und stückweise glatt. Wegen (1) kann man die Bewegungsgleichung (18) in folgender Form schreiben:

$$\ddot{Z}(\tau) + 2\alpha \dot{x}(\tau) + x(\tau) = 0 \tag{20}$$

Statt (18) wollen wir diese Gleichung nach den Regeln der Laplace-Transformation in den Bildraum abbilden. Dabei wird hauptsächlich die Regel über die Abbildung der Ableitung einer Funktion benutzt [1]). Die Anwendung dieser Regel würde aber in unserem Falle erfordern, dass an allen Stellen $x(\tau)$ einmal und $Z(\tau)$ zweimal differenzierbar ist. Das ist nicht der Fall. Nach DOETSCH (1950, S. 103) kann man aber mit Hilfe eines verallgemeinerten Differenzierbarkeitsbegriffes, wie er in der Theorie des Lebesguesschen Integrals verwendet wird, nachweisen, dass diese Regel auch noch für den Sonder-

[1]) s. DOETSCH (1950) S. 100.

fall der ersten Ableitung einer stetigen, nur stückweise glatten Funktion gilt. Die in (20) auftretenden Ableitungen $\dot{x}(\tau)$ und $\ddot{Z}(\tau)$ sind aber erste Ableitungen von stetigen und stückweise glatten Funktionen. Die Eigenschaften der auftretenden Funktionen lassen also gerade noch die Behandlung der Differentialgleichung (18) beziehungsweise (20) mittels der Laplace-Transformation in der gewöhnlichen Weise zu.

Wenn s die komplexe Bildvariable bedeutet, folgt aus (20) die zugehörige Bildgleichung:

$$s^2 \mathfrak{L}\{Z(\tau)\} - s\,Z(+0) - \dot{Z}(+0) + 2\,\alpha[s\,\mathfrak{L}\{x(\tau)\} - x(+0)] + \mathfrak{L}\{x(\tau)\} = 0 \quad (21)$$

Nach (1) und (19) sind die auftretenden Anfangswerte gleich Null. Wenn man $Z(\tau)$ nach (1) wieder zerlegt, folgt also

$$(s^2 + 2\,\alpha s + 1)\,\mathfrak{L}\{x(\tau)\} = -s^2\,\mathfrak{L}\{z(\tau)\} \quad (22)$$

Da die Originalfunktionen $x(\tau)$ und $z(\tau)$ dem Betrage nach beschränkt sind, existieren ihre zugehörigen Bildfunktionen in der ganzen Halbebene, in der der Realteil von s positiv ist. Aus der Rücktransformation von (22) in den Originalbereich ergibt sich jetzt die Lösung der Geophongleichung (18) bei den Anfangsbedingungen (19) zu

$$x(\tau) = -\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{s^2\,\mathfrak{L}\{z(\tau)\}}{s^2 + 2\alpha s + 1}\right\} \quad (23)$$

Da $\mathfrak{L}\{\dot{x}(\tau)\} = s\,\mathfrak{L}\{x(\tau)\}$ ist, folgt für die Geschwindigkeit

$$\dot{x}(\tau) = -\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{s^3\,\mathfrak{L}\{z(\tau)\}}{s^2 + 2\,\alpha s + 1}\right\} \quad (24)$$

Es ist interessant, dass bei den natürlichen Anfangsbedingungen (19) der Anfangswert $\dot{x}(+0)$, der ja von Null verschieden sein kann, in der Lösung (23) und (24) nicht mehr auftritt.

Man hätte natürlich die Differentialgleichung (18) auch mit anderen Methoden lösen können. Dass wir unter den gegebenen Voraussetzungen die Lösung aber auch mit Anwendung der Laplace-Transformation herbeiführen konnten, verschafft uns einige Vorteile, die sich besonders bei praktischen Rechnungen als nützlich erweisen:

1. Es ist nicht mehr erforderlich, die allgemeine Lösung von (18) zu kennen und sie mit den Anfangsbedingungen (19) zu spezialisieren. Die Gleichungen (23) und (24) geben direkt die spezielle Lösung an, bei der die Anfangsbedingungen automatisch berücksichtigt sind.

2. Durch (23) und (24) lässt sich die Lösung für den allgemeinen Fall der Erregung $z(\tau)$ überhaupt explizit angeben.
3. Für die praktische Berechnung der Lösung mittels der Laplace-Transformation nach (23) und (24) stehen umfangreiche Hilfsmittel in Form von Rechenregeln und Korrespondenzentabellen zur Verfügung.
4. Zur Ermittlung von $\dot{x}(\tau)$ nach (24) ist nicht mehr die vorherige Kenntnis von $x(\tau)$ und anschliessende Differentiation erforderlich.

Der letzte Punkt ist für unsere Untersuchung besonders wichtig, da wir zur Berechnung des Geophons die Kenntnis des Schwingweges $x(\tau)$ nicht benötigen. Uns interessiert im folgenden nur die Geschwindigkeit $\dot{x}(\tau)$ nach (24), die wir daher für unsere Zwecke auch schlechthin als die Lösung der Differentialgleichung (18) bezeichnen.

Für die in den Geophonstromkreis induzierte Spannung U, die jetzt als Funktion von τ aufgefasst wird, folgt aus (3) und (17)

$$U(\tau) = K\omega_0 \, \dot{x}(\tau) \tag{25}$$

Bei der Berechnung des Geophons geht es um die Auffindung des Zusammenhanges zwischen der Erregung $z(\tau)$ des Geophons und der von diesem in den Geophonstromkreis induzierten Spannung. Mit anderen Worten: Gesucht ist der Zusammenhang zwischen dem, was auf das Geophon einwirkt, und dem, was daraufhin von ihm wie von einem Generator abgegeben wird. Dieser Zusammenhang ist durch die Gleichungen (24) und (25) gegeben, die sich zu der folgenden zusammenfassen lassen:

$$U(\tau) = -K\omega_0 \, \mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{s^3 \, \mathfrak{L}\{z(\tau)\}}{s^2 + 2\alpha s + 1} \right\} \tag{26}$$

2. Abschnitt: Die Erregung einer Geophongruppe

2. 1) *Aufstellung der Geophongruppe*

Unter einer Geophongruppe wird im folgenden ganz allgemein eine beliebige Mehrfachaufstellung von m gleichartigen Geophonen verstanden, die in einer einzigen elektrischen Schaltung auf irgend eine Weise zusammengeschaltet sind und so alle nur auf einen Verstärker der Registrierapparatur einwirken. In diesem 2. Abschnitt wollen wir nur die Erregung der Geophongruppe durch seismische Wellen behandeln. Die Berechnung der Geophongruppe erfolgt erst im nächsten 3. Abschnitt. Von der Geophongruppe ist also hier lediglich ihre Aufstellung im Gelände wichtig, ihre elektrische Schaltung interessiert erst später.

Die Erdoberfläche, auf der die m Geophone der Gruppe aufgestellt sind, sei eine horizontale Ebene. Einen Punkt dieser Ebene, der sich innerhalb des

Aufstellungsbereiches der Geophongruppe befindet, wählen wir zum Ursprung eines kartesischen ξ, η, z — Koordinatensystems (Abb. 1). Dieser Punkt kann natürlich mit dem Ort eines Geophons zusammenfallen. Als ξ-Achse (Einheitsvektor $\mathfrak{i}$) wählen wir am besten eine durch die geometrische Form

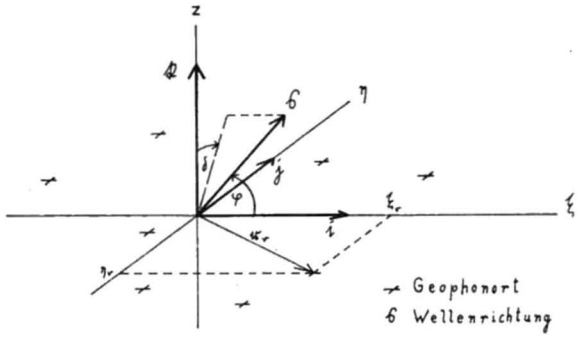

Abb. 1. Koordinatensystem zur Beschreibung der Geophongruppe und der Wellenrichtung.
Coordinate system for description of the geophone group and the direction of the wave.

der Mehrfachaufstellung ausgezeichnete horizontale Gerade. Man kann auch andere Geraden wie die Profilrichtung oder andere ausgezeichnete Richtungen im Gelände als ξ-Achse wählen. Die z-Achse (Einheitsvektor $\mathfrak{k}$) ist vertikal nach oben gerichtet. Die Orientierung der η-Achse (Einheitsvektor $\mathfrak{j}$) möge so erfolgen, dass sich ein Rechtssystem ergibt. Wenn man nun die Geophone von 1 bis m numeriert, dann kann die Aufstellung der Geophongruppe vollständig beschrieben werden durch die Angabe der m Ortsvektoren zu den einzelnen Geophonen:

$$\mathfrak{r}_\nu = \xi_\nu \, \mathfrak{i} + \eta_\nu \, \mathfrak{j}; \quad \nu = 1, \ldots, m \tag{27}$$

2. 2) *Ebene Kompressionswellen — Zeitzählung*

Die erregenden seismischen Wellen steigen aus dem Untergrund auf, der den Halbraum $z \leqslant 0$ erfüllt. Die Fronten dieser Wellen mögen im Aufstellungsbereich der Geophongruppe seitlich nicht begrenzt sein. Weiter nehmen wir an, dass die Wellen innerhalb und in der Nähe des Aufstellungsbereiches mit guter Näherung als ebene Wellen beschrieben werden können, die sich mit der konstanten Geschwindigkeit V fortbewegen. Diese beiden Bedingungen für die seismischen Wellen liegen ganz in der Richtung der Aufgabenstellung, wie sie in der Einleitung erfolgte, dass nämlich in dieser Arbeit die Wirkung der Mehrfachaufstellung lediglich für die Nutzwellen untersucht werden soll. Die meisten Störwellen, deren Abschwächung gerade durch die Mehrfachaufstellung angestrebt wird, erfüllen diese beiden Bedingungen in der Regel nicht. Ihre Wellenfronten sind oft seitlich begrenzt und stark gekrümmt.

Weil die m Geophone der Geophongruppe alle von gleicher Art sind, können wir hier zur Beschreibung der Vorgänge wieder das dimensionslose Zeitmass τ nach (16) benutzen. Wenn $\mathfrak{x}_0$ der Ortsvektor eines beliebigen Bodenteilchens in seiner Ruhelage und $\mathfrak{x}(\tau)$ der seines Ortes zur Zeit τ ist, dann ist der mathematische Ausdruck für die Bewegung des Bodens beim Durchlaufen ebener, seismischer Kompressionswellen [1]

$$\mathfrak{x}(\tau) = \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{s} f\left\{\tau - \frac{\omega_0(\mathfrak{x}_0 \cdot \mathfrak{s})}{V}\right\}. \tag{28}$$

Darin ist $\mathfrak{s}$ der Einheitsvektor in der Fortpflanzungsrichtung der Wellen und $f(u)$ ist die Wellenfunktion. Das Argument

$$u = \tau - \frac{\omega_0(\mathfrak{x}_0 \cdot \mathfrak{s})}{V} \tag{29}$$

ist die Phase der Wellenfunktion.

Die Wellenfunktion $f(u)$ möge nun dieselben mathematischen Eigenschaften haben wie die im Abschnitt 1.2 behandelte Erregungsfunktion $z(\tau)$ beziehungsweise $z(t)$. Entsprechend (10) gilt also

$$f(u) = 0; \quad u \leqslant 0 \tag{30}$$

Physikalisch beginnt der Wellenzug erst mit der Phase $u = 0$. Weiter ist $f(u)$ stetig und stückweise glatt, und sie selber und ihre erste Ableitung $\dot{f}(u)$ sind dem Betrage nach beschränkt. Da nach (29) an einem festgehaltenen Ort $du = d\tau$ ist, wollen wir die Differentiation nach u wie die nach τ durch einen Punkt bezeichnen. Über diese Bedingungen hinaus kann die Wellenfunktion der erregenden Wellen eine willkürliche Funktion sein. Wenn $f(u)$ so beschaffen ist, dass das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty |\ddot{f}(u)|\, du \quad \textit{existiert} \tag{31}$$

so bezeichnen wir die erregenden seismischen Wellen als einen seismischen Impuls oder eine seismische Impulswelle. Die Wellenfunktion $f(u)$ nennen wir dann die zugehörige Impulsfunktion. Die Begründung dieser Definition und die Erläuterung der Bedingung (31) erfolgt erst in den Abschnitten 4.1 und 4.4.

Durch die Gleichung (29) ist die Zählung der Zeit τ bereits festgelegt. Es ist nämlich gerade dann $\tau = 0$, wenn die erregende Welle mit ihrer Phase $u = 0$ am Koordinatenursprung eintrifft. In diesem Zeitmass τ wollen wir im folgenden alle Vorgänge in der Geophongruppe beschreiben. Wenn wir

[1] Vgl. Fussnote nächste Seite.

in den späteren Abschnitten die Verhältnisse bei der Geophongruppe vergleichen mit denen bei einem Geophon in der Einzelaufstellung, so wählen wir als Ort dieses einzelnen Geophons immer den Ursprung des Koordinatensystems, mit dem wir die Aufstellung der Geophongruppe beschreiben. Dadurch wird erreicht, dass die oben für die Geophongruppe festgelegte Zeitzählung mit derjenigen übereinstimmt, die im 1.Abschnitt bei der Behandlung des einzelnen Geophons benutzt wurde.

2. 3) *Erregungen der Geophone*

In Abb. 1 ist die Fortpflanzungsrichtung $\mathfrak{s}$ der Wellen durch Polarkoordinaten beschrieben. Der Winkel $(\mathfrak{i}, \mathfrak{s})$ den $\mathfrak{s}$ mit der ξ-Achse bildet, ist die eine Koordinate φ, für die $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ gilt, da nur Wellen betrachtet werden, die aus dem Halbraum $z < 0$ ankommen. Die andere ist der Winkel δ, den $\mathfrak{k}$ mit der $(\mathfrak{i}, \mathfrak{s})$-Ebene bildet und für den $-\pi/2 \leqslant \delta \leqslant \pi/2$ gilt. Die Komponenten von $\mathfrak{s}$ sind jetzt

$$\mathfrak{s} \cdot \mathfrak{i} = \cos \varphi; \quad \mathfrak{s} \cdot \mathfrak{j} = \sin \delta \sin \varphi; \quad \mathfrak{s} \cdot \mathfrak{k} = \cos \delta \sin \varphi = C \tag{32}$$

Dabei ist C eine Abkürzung für die Vertikalkomponente.

Die Erregung der einzelnen Geophone der Gruppe durch die ankommenden ebenen Wellen ergibt sich, wenn man in (28) für $\mathfrak{x}_0$ nach (27) die Ortsvektoren der Geophone einführt, und die vertikale Komponente bildet [1]):

$$z_\nu(\tau) = C f\left\{\tau - \frac{\omega_0}{V}(\mathfrak{r}_\nu \cdot \mathfrak{s})\right\}; \quad \nu = 1, \ldots, m \tag{33}$$

Wir führen nun bei Berücksichtigung von (27) und (32) die Abkürzungen ein

$$\tau_\nu = \frac{\omega_0}{V}(\mathfrak{r}_\nu \cdot \mathfrak{s}) = \frac{\omega_0}{V}\left(\xi_\nu \cos \varphi + \eta_\nu \sin \delta \sin \varphi\right); \quad \nu = 1, \ldots, m \tag{34}$$

Es folgen dann aus (33) die Erregungen in der Gestalt:

[1]) Diese Betrachtungsweise ist üblich bei der Behandlung des vorliegenden Problemkreises. Sie gilt nur dann streng, wenn die Ebene $z = 0$ im Vollraum eines elastischen Mediums eingebettet ist. In unserem Falle ist die Ebene $z = 0$ jedoch eine freie Oberfläche und es gehen von ihr reflektierte Kompressionswellen und Transversalwellen aus. Es gelten dann die weiteren Überlegungen nur dann streng, wenn $Cf(u)$ die vertikale Komponente der wahren Bodenbewegung an der freien Oberfläche richtig beschreibt. Es stimmt dann $f(u)$ nicht mehr mit der Wellenfunktion überein. — Wollte man unter Beibehaltung der Bedeutung von $f(u)$ als Wellenfunktion unser Problem behandeln, so müsste man die wahre Bodenbewegung an der freien Oberfläche aus der Randbedingung der Spannungsfreiheit an derselben berechnen. Das würde noch Voraussetzungen über die elastischen Eigenschaften unseres Mediums erfordern und die mathematische Behandlung wesentlich komplizieren. Wir nehmen daher von dieser weitergehenden Betrachtung Abstand.

$$z_\nu(\tau) = C\, f\{\tau - \tau_\nu\}; \quad \nu = 1, \ldots, m \tag{35}$$

Alle Geophone erfahren der Form nach die gleiche Erregung, allerdings zeitlich gegeneinander verschoben. Von dieser Verschiebung abgesehen, haben die Funktionen $z_\nu(\tau)$ dieselben Eigenschaften wie die im Abschnitt 2.2 behandelte Wellenfunktion $f(u)$ und die Erregungsfunktion $z(\tau)$ im 1. Abschnitt.

Am Ort des ν-ten Geophons hat die seismische Welle wegen (29), (34) und (35) zur Zeit τ die Phase

$$u = \tau - \tau_\nu \tag{36}$$

Die Phase $u = 0$ trifft dort zur Zeit $\tau = \tau_\nu$ ein. Wegen (30) und (35) beginnt in diesem Zeitpunkt erst die eigentliche Erregung des ν-ten Geophons. Die Anfangsbedingungen für die Erregungen sind also

$$z_\nu(\tau) = 0; \quad \tau \leqslant \tau_\nu; \quad \nu = 1, \ldots, m \tag{37}$$

Die τ_ν nach (34) hängen ausser vom gewählten Koordinatensystem auch von der Richtung $\mathfrak{s}$ ab, aus der die Wellen eintreffen. Sie können auch negative Werte haben.

Analog zu den Bezeichnungen im 1.Abschnitt beschreiben wir die Bewegung der Geophonspule relativ zum Gehäuse beim ν-ten Geophon mit der Funktion $x_\nu(\tau)$. Für das Einzelgeophon folgte aus (10) die Anfangsbedingung (12) für die Bewegung. Wegen der elektrischen Kopplung der Geophone in der Geophongruppe, die erst im 3.Abschnitt näher behandelt wird, darf hier aus (37) jedoch nicht gefolgert werden, dass $x_\nu(\tau)$ für $\tau \leqslant \tau_\nu$ verschwindet. Vielmehr beginnen die Bewegungen aller m Geophone gleichzeitig in dem Moment, in dem erstmals die Erregung eines Geophons (oder mehrerer) der Gruppe beginnt. Für diesen Zeitpunkt ist

$$\tau = T = Min\,(\tau_\nu) = \frac{1}{V}\, Min\,(\mathfrak{r}_\nu \cdot \mathfrak{s}) \tag{38}$$

Die Anfangsbedingungen für die Bewegungen sind also:

$$x_\nu(\tau) = 0; \quad \tau \leqslant T; \quad \nu = 1, \ldots, m \tag{39}$$

Analog zu (1) können wir die Bewegungen der Geophonspulen gegenüber einem raumfesten Koordinatensystem beschreiben durch die Funktionen

$$Z_\nu(\tau) = x_\nu(\tau) + z_\nu(\tau); \quad \nu = 1, \ldots, m \tag{40}$$

Auch wenn man die Kopplung der Geophone durch die elektrische Schaltung berücksichtigt, sieht man leicht ein, dass auf die Geophonspulen nur Kräfte von endlichen Beträgen einwirken. Daraus folgt, dass alle $Z_\nu(\tau)$ glatte Funktionen sind. Aus (37) und (39) folgen jetzt die Anfangsbedingungen für die Geschwindigkeiten:

$$\dot{x}_\nu\{T+0\} + \dot{z}_\nu\{T+0\} = 0; \quad \nu = 1, \ldots, m \tag{41}$$

Entsprechend (19) bedeutet die Schreibweise der Argumente, dass die rechtsseitigen Grenzwerte an der Stelle $\tau = T$ gemeint sind. Die Bedingung (41) gilt insbesondere für das Geophon, dessen τ_ν nach (38) gleich T ist.

2. 4) *Reihenaufstellung*

Als ein spezielles Beispiel für die Aufstellung einer Geophongruppe wollen wir die sogenannte Reihenaufstellung beschreiben, die in Deutschland in der Praxis sehr gebräuchlich ist. Bei ihr sind die Geophone in gleichem Abstand e voneinander in einer Reihe längs einer Geraden aufgestellt. In Abb. 2 ist die

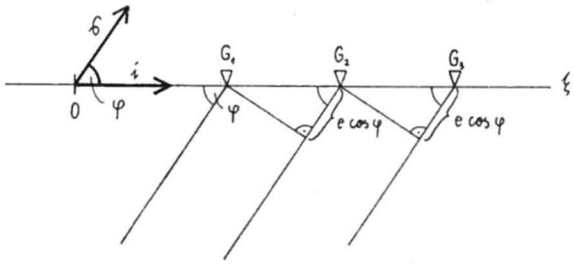

Abb. 2. Reihenaufstellung von drei Geophonen.
Linear array of three geophones.

($\mathfrak{i}$, $\mathfrak{z}$)-Ebene aus Abb. 1 für den Fall der Reihenaufstellung besonders dargestellt. Dabei ist die Aufstellungsgerade als ξ-Achse des Koordinatensystems gewählt worden. Wenn die Geophone der Reihe nach numeriert sind, so gilt für die Koordinaten der Geophone

$$|\xi_{\nu+\mu} - \xi_\nu| = \mu e; \quad \eta_\nu = 0; \quad \mu = 0, 1, \ldots, m\text{-}1; \quad \nu = 1, \ldots, m\text{-}\mu \tag{42}$$

Daraus folgt in Verbindung mit (34):

$$|\tau_{\nu+\mu} - \tau_\nu| = \mu\tau_0; \quad \mu = 0, 1, \ldots, m\text{-}1; \quad \nu = 1, \ldots, m\text{-}\mu \tag{43}$$

wo τ_0 die folgende Abkürzung bedeutet:

$$\tau_0 = \frac{\omega_0 e}{V} |\cos \varphi| = \tau_0(\varphi) \tag{44}$$

Bei der Reihenaufstellung sind also die Laufzeitdifferenzen der ebenen Welle zwischen benachbarten Geophonen konstant und dem Betrage alle gleich τ_0. Es ist τ_0 nur eine Funktion der Richtungskoordinate φ und von δ unabhängig. Dieser Vorteil ist eine Folge der speziellen Koordinatenwahl. Er wäre nicht entstanden, wenn für die eine der beiden Winkelkoordinaten der in der Seismik gebräuchliche Emergenzwinkel gewählt worden wäre. Aus (44) folgt für τ_0 die Svmmetriebeziehung

$$\tau_0(\varphi) = \tau_0\{\pi - \varphi\} \tag{45}$$

Bei dieser Beschreibung der Reihenaufstellung bleibt die Lage des Koordinatenursprungs im Aufstellungsbereich der Geophongruppe auf der ξ-Achse noch frei wählbar.

3. Abschnitt: Die Berechnung der Geophongruppe

3. 1) *Differentialgleichungssystem der Geophongruppe*

In einer allgemeinen Geophongruppe sind die m gleichartigen Geophone auf beliebige Weise in einem elektrischen Schaltungsnetz zusammengeschaltet. Dieses Netz ist durch die Feldkabelzuleitungen als Zweipol an einen Verstärker der Registrierapparatur geschaltet und bildet mit dem Verstärkereingang den sogenannten Eingangskreis. Wir nennen den Strom $I(\tau)$ in diesem Stromkreis den Eingangsstrom. Die elektromotorische Kraft $U(\tau)$, die im Eingangskreis wirksam ist, wollen wir jedoch die resultierende Ausgangsspannung nennen, weil sie hier aufgefasst wird als eine Spannung, die von der Geophongruppe wie von einem Generator nach aussen abgegeben wird. Wie im Abschnitt 1.2 sei auch hier die Annahme gemacht, dass die Selbstinduktionen in der ganzen Schaltung vernachlässigbar seien gegenüber den mit ihnen in Serie liegenden Wirkwiderständen. Es gilt dann das Ohmsche Gesetz in der Form

$$U(\tau) = R\, I(\tau) \tag{46}$$

Dabei ist R der gesamte Wirkwiderstand des Eingangskreises.

Für das ν-te Geophon gilt jetzt entsprechend (6) nach Einführung des dimensionslosen Zeitmasses mittels (15), (16) und (17) die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x}_\nu(\tau) + \frac{r}{M\omega_0}\,\dot{x}_\nu(\tau) + x_\nu(\tau) + \frac{K}{M\omega_0^2}\,I_\nu(\tau) = -\,\ddot{z}_\nu(\tau); \quad \nu = 1, \ldots, m \tag{47}$$

Darin ist $I_\nu(\tau)$ der Strom, der durch die Schwingspule des ν-ten Geophons fliesst. Durch die Bewegung der Spule im Magnetfeld wird in ihr entsprechend (25) die Spannung induziert:

$$U_\nu(\tau) = K\omega_0\,\dot{x}_\nu(\tau); \quad \nu = 1, \ldots, m \tag{48}$$

Da die m Geophone der Geophongruppe durch die elektrische Schaltung miteinander gekoppelt sind, hat der Strom $I_\nu(\tau)$ seine Ursache nicht nur in der Bewegung des ν-ten Geophons, sondern letzten Endes in den Bewegungen aller Geophone. $I_\nu(\tau)$ hängt also mit $U_\nu(\tau)$ beziehungsweise nach (48) mit $\dot{x}_\nu(\tau)$ nicht mehr durch eine so einfache Gleichung wie (8) zusammen. Vielmehr gelten jetzt nach dem Ohmschen Gesetz für Schaltungen ganz allgemein die linearen Beziehungen:

$$I_\nu(\tau) = \sum_1^m{}^\mu Y_{\nu\mu}\, U_\mu(\tau) = K\omega_0 \sum_1^m{}^\mu Y_{\nu\mu}\, \dot{x}_\mu(\tau); \quad \nu = 1, \ldots, m \tag{49}$$

Entsprechend gilt für den Eingangsstrom

$$I(\tau) = \sum_1^m{}^\mu Y_\mu\, U_\mu(\tau) = K\omega_0 \sum_1^m{}^\mu Y_\mu\, \dot{x}_\mu(\tau) \tag{50}$$

Die Koeffizienten $Y_{\nu\mu}$ und Y_μ hängen von den Wirkwiderständen der Schaltung ab und haben die Dimension von Leitwerten. Durch Einsetzen von (49) in (47) erhält man die Gleichungen:

$$\ddot{x}_\nu(\tau) + \frac{r}{M\omega_0}\, \dot{x}_\nu(\tau) + x_\nu(\tau) + \frac{K^2}{M\omega_0} \sum_1^m{}^\mu Y_{\nu\mu}\, \dot{x}_\mu(\tau) = -\ddot{z}_\nu(\tau); \quad \nu = 1, \ldots, m \tag{51}$$

Dieses System von m Differentialgleichungen beschreibt die Geophongruppe. Die Anfangsbedingungen sind durch (37), (39) und (41) gegeben. Nach Lösung des Systems (51) berechnet sich die resultierende Ausgangsspannung nach (46) und (50) zu

$$U(\tau) = RK\omega_0 \sum_1^m{}^\mu Y_\mu\, \dot{x}_\mu(\tau) \tag{52}$$

3. 2) *Reduktion des Differentialgleichungssystems*

Es ist das Ziel der Berechnung der Geophongruppe, den Zusammenhang zwischen ihrer Erregung und der von ihr abgegebenen resultierenden Ausgangsspannung zu ermitteln. In den Gleichungen (51) und (52) ist dieser Zusammenhang bereits vollständig formuliert. Demnach führt also die Berechnung von $U(\tau)$ über die vorherige Kenntnis der Bewegungen $x_\nu(\tau)$ der einzelnen Geophone. Das Differentialgleichungssystem (51) ist aber ein gekoppeltes System. Seine Lösung stellt ein Problem $2m$-ter Ordnung dar und macht im allgemeinen sehr grosse Schwierigkeiten. Man kann hier fragen, ob das Zwischenergebnis der Rechnung, nämlich die Kenntnis der Geophonbewegungen $x_\nu(\tau)$, keinen Umweg darstellt, der sich vermeiden liesse. Jedenfalls ist die Kenntnis der einzelnen $x_\nu(\tau)$ viel umfangreicher als lediglich die der Summe

$$X(\tau) = \sum_1^m{}^\nu Y_\nu\, x_\nu(\tau) \tag{53}$$

mit der man die gesuchte Spannung wegen (52) einfach nach der Gleichung

$$U(\tau) = RK\omega_0\, \dot{X}(\tau) \tag{54}$$

berechnen könnte. Die Frage stellt sich also in der Form, ob man nicht aus (51) eine einfacher zu lösende Gleichung für die Funktion $X(\tau)$ gewinnen kann.

Wenn man jede der Gleichungen (51) jeweils mit Y_ν multipliziert und dann alle m Gleichungen addiert, ergibt sich bei Berücksichtigung von (53) folgende Summengleichung:

$$\ddot{X}(\tau) + \frac{r}{M\omega_0}\dot{X}(\tau) + X(\tau) + \frac{K^2}{M\omega_0}\sum_1^m{}^{\nu} Y_\nu \sum_1^m{}^{\mu} Y_{\nu\mu}\,\dot{x}_\mu(\tau) = -\sum_1^m{}^{\nu} Y_\nu\,\ddot{z}_\nu(\tau) \tag{55}$$

Betrachten wir den Spezialfall, in dem die m Gleichungen gelten:

$$\sum_1^m{}^{\nu} Y_\nu Y_{\nu\mu} = A\,Y_\mu; \quad \mu = 1, \ldots, m \tag{56}$$

dann kann man an der Doppelsumme in (55) bei Berücksichtigung von (53) folgende Umformung vornehmen:

$$\sum_1^m{}^{\nu} Y_\nu \sum_1^m{}^{\mu} Y_{\nu\mu}\,\dot{x}_\mu = \sum_1^m{}^{\mu} \dot{x}_\mu \sum_1^m{}^{\nu} Y_\nu Y_{\nu\mu} = A\sum_1^m{}^{\mu} \dot{x}_\mu Y_\mu = A\,\dot{X} \tag{57}$$

A ist ein von μ unabhängiger Proportionalitätsfaktor, der die Dimension eines Leitwertes hat. Aus (55) und (57) folgt dann

$$\ddot{X}(\tau) + 2\alpha_m\,\dot{X}(\tau) + X(\tau) = -\sum_1^m{}^{\nu} Y_\nu\,\ddot{z}_\nu(\tau) \tag{58}$$

wo α_m folgende Abkürzung bedeutet:

$$\alpha_m = \frac{1}{2M\omega_0}(r + AK^2) \tag{59}$$

Die Beziehung (56) stellt eine Bedingung für die elektrische Schaltung der Geophongruppe dar. Wenn die Schaltung so beschaffen ist, dass die Bedingung (56) erfüllt ist, lässt sich also tatsächlich aus dem Gleichungssystem (51) eine einfache Differentialgleichung für $X(\tau)$ nach (53), nämlich (58) herleiten. Für diese speziellen Schaltungen erscheint die Ermittlung der resultierenden Ausgangsspannung $U(\tau)$ von einem Problem 2m-ter Ordnung auf ein Problem 2-ter Ordnung reduziert. Im Abschnitt 3.4 wird gezeigt werden, dass die in der Praxis gebräuchlichen Schaltungen der Bedingung (56) in der Regel genügen. Es ist also hier eine entscheidende Vereinfachung in der Berechnung von Geophongruppen erreicht, die umso bedeutungsvoller ist, je grösser die Anzahl m der Geophone ist. Die Anfangsbedingungen für (58) sind ausser (37)

$$\left.\begin{aligned} &X(\tau) = 0; \quad \tau \leqslant T \\ &X\{T+0\} + \sum_{1}^{m}{}^{\nu} Y_\nu \dot{z}_\nu\{T+0\} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

Sie ergeben sich aus (39) und (41) in Verbindung mit (53).

3. 3) *Fiktive Geophongruppe*

Wir wollen nun eine Umformung des vorstehenden Berechnungsverfahrens vornehmen. Da die Erregungsfunktion in (58) eine m-gliedrige Summe darstellt, wird man zweckmässigerweise folgendes Gleichungssystem lösen

$$\ddot{y}_\nu(\tau) + 2\alpha_m \dot{y}_\nu(\tau) + y_\nu(\tau) = -\ddot{z}_\nu(\tau); \quad \nu = 1, \ldots, m \tag{61}$$

und dann $X(\tau)$ nach der Gleichung

$$X(\tau) = \sum_{1}^{m}{}^{\nu} Y_\nu y_\nu(\tau) \tag{62}$$

berechnen. Die Anfangsbedingungen von (61) mögen lauten:

$$\left.\begin{aligned} &y_\nu(\tau) = 0; \quad \tau \leqslant \tau_\nu \\ &\dot{y}_\nu\{\tau_\nu + 0\} + \dot{z}_\nu\{\tau_\nu + 0\} = 0 \end{aligned}\right\}; \quad \nu = 1, \ldots, m \tag{63}$$

Sie stehen nicht im Widerspruch zu den Anfangsbedingungen (60), wie man leicht mit (38) und (62) nachweisen kann.

Ein Vergleich von (53) und (62) ergibt, dass im Falle der Gültigkeit von (56) das gekoppelte Differentialgleichungssystem (51) zur Berechnung von $U(\tau)$ nach (54) ersetzt werden kann durch das ungekoppelte System (61). Natürlich folgt aus diesem Vergleich nicht, dass $y_\nu(\tau)$ mit der Bewegung $x_\nu(\tau)$ des ν-ten Geophons identisch ist.

Da aber die m Gleichungen (61) sich den m Geophonen der Gruppe einzeln zuordnen lassen und da sie alle mathematisch dieselbe Form haben wie die Bewegungsgleichung (18) für ein Einzelgeophon, kann man doch $y_\nu(\tau)$ in gewissem Sinne als eine Geophonbewegung auffassen, nämlich als die Bewegung eines fiktiven Geophons am Orte des ν-ten realen Geophons. Die reale Geophongruppe erscheint so ersetzt durch eine fiktive Geophongruppe. Die fiktive Geophongruppe hat genau dieselbe Aufstellung und Schaltung und wird von den seismischen Wellen in genau derselben Weise erregt wie die reale. Sie hat gegenüber jener jedoch die zwar recht sonderbare, mathematisch aber sehr angenehme Eigenschaft, dass ihre einzelnen fiktiven Geophone durch die elektrische Schaltung nicht miteinander gekoppelt werden. Die Daten der Schaltung, die bei der realen Geophongruppe die Kopplung be-

stimmen, wirken sich bei der fiktiven Geophongruppe nach (56) und (59) über die Konstante A lediglich auf die Grösse α_m aus.

In den Gleichungen (61) erscheint α_m als Dämpfungsmass der m gleichartigen fiktiven Geophone. In diesem Sinne wollen wir α_m das „Dämpfungsmass der (zugehörenden realen) m-fachen Geophongruppe" nennen. Hiermit ist erläutert, inwiefern α_m eine für die Dämpfungsverhältnisse der Geophongruppe charakteristische Grösse darstellt. Für die einzelnen realen Geophone der Geophongruppe können wir kein Dämpfungsmass angeben, wie es in (18) und (15) für das Einzelgeophon möglich war. Diese „anschauliche" Erläuterung zur Grösse α_m ist der Hauptzweck, warum hier die physikalisch doch recht unsinnige Vorstellung einer fiktiven Geophongruppe überhaupt entwickelt wird.

Wenn die Geophongruppe durch ebene Wellen (28) erregt wird, so kann man in (61) die Erregungen $z_\nu(\tau)$ nach (35) einführen und erhält.

$$\ddot{y}_\nu(\tau) + 2\alpha_m \dot{y}_\nu(\tau) + y_\nu(\tau) = -C\,\ddot{f}\{\tau - \tau_\nu\}; \quad \nu = 1, \ldots, m \tag{64}$$

Es sei nun eine Funktion $y(u)$ der Phase u nach (36) definiert als Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{y}(u) + 2\alpha_m \dot{y}(u) + y(u) = -\ddot{f}(u) \tag{65}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\left.\begin{aligned} y(u) &= 0; \quad u \leqslant 0 \\ \dot{y}(+0) + \dot{f}(+0) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

Wir können dann mit Hilfe dieser Funktion $y(u)$ die Lösung des Differentialgleichungssystem (64) leicht angeben:

$$y_\nu(\tau) = C\,y\{\tau - \tau_\nu\}; \quad \nu = 1, \ldots, m \tag{67}$$

Wegen (66) erfüllt diese Lösung auch die Anfangsbedingungen (63). Diese besagen, dass die fiktive Bewegung $y_\nu(\tau)$ des ν-ten Geophons zur Zeit $\tau = \tau_\nu$ beginnt, also erst in dem Moment, in dem nach (37) auch seine Erregung $z_\nu(\tau)$ beginnt. Die realen Bewegungen $x_\nu(\tau)$ der Geophone beginnen dagegen nach (39) alle gleichzeitig zur Zeit $\tau = T$. Die Gleichungen (67) bedeuten, dass bei Erregung der Geophongruppe nach (35) die fiktiven Bewegungen $y_\nu(\tau)$ der Geophone der Form nach untereinander völlig gleich sind, der Zeit nach jedoch wie die gleichformigen Erregungen $z_\nu(\tau)$ gegeneinander verschoben sind. Die realen Bewegungen $x_\nu(\tau)$ der Geophone sind dagegen bei gleichformigen Erregungen $z_\nu(\tau)$ keineswegs der Form nach untereinander gleich.

Für eine Geophongruppe, deren Schaltung der Bedingung (56) genügt und die durch ebene Wellen (28) erregt wird, lässt sich jetzt das Ergebnis

ihrer Berechnung auf eine einfache und übersichtliche Form bringen. Nach (54), (62) und (67) ist die resultierende Ausgangsspannung

$$U(\tau) = R K \, \omega_0 C \sum_{1}^{m} {}^{\nu} Y_\nu \dot{y}\{\tau - \tau_\nu\} \tag{68}$$

Für die Funktion $\dot{y}(u)$ folgt mit Hilfe der Laplace-Transformation aus (65) genau so wie (24) aus (18)

$$\dot{y}(u) = - \mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{s^3 \, \mathfrak{L}\{f(u)\}}{s^2 + 2\alpha_m s + 1} \right\} \tag{69}$$

Die Gleichungen (68) und (69) beschreiben vollständig den Zusammenhang zwischen den in Richtung $\mathfrak{s}$ eintreffenden, die Geophongruppe erregenden ebenen Wellen mit der Wellenfunktion $f(u)$ und der resultierenden Ausgangsspannung $U(\tau)$, die von der Geophongruppe als elektromotorische Kraft in den Eingangskreis abgegeben wird. Bei der praktischen Rechnung ist hier genau wie bei der Berechnung des Einzelgeophons im 1. Abschnitt die Lösung nur einer einzigen Differentialgleichung 2-ter Ordnung, nämlich der Gleichung (65) erforderlich.

Man kann sich leicht überlegen, dass die Funktion $y(u)$ in (66) dieselben Eigenschaften hat wie $x(\tau)$ in (18). Es ist also $y(u)$ stetig und stückweise glatt. Ihre Eckstellen fallen mit denen von $f(u)$ zusammen. Sowohl $y(u)$ als auch $\dot{y}(u)$ sind dem Betrage nach beschränkt. Wenn also $f(u)$ nur stückweise glatt ist, dann ist $U(\tau)$ nach (68) nicht stetig, sondern springt an einzelnen Zeitpunkten um endliche Beträge. Wenn insbesondere $f(u)$ an der Stelle $u = 0$ nicht differenzierbar ist, hat $U(\tau)$ an allen Stellen $\tau = \tau_\nu$; $\nu = 1, \ldots, m$ Unstetigkeitsstellen.

3. 4) *Symmetrische Schaltung der Geophongruppe*

Wir wollen jetzt die Bedingung (56), die die grosse Vereinfachung in der Berechnung der Geophongruppe erst möglich macht, näher betrachten. Die Koeffizienten $Y_{\nu\mu}$ und Y_μ in (49) und (50) sind durch die Schaltung der Geophongruppe fest vorgegeben. Es lassen sich mit ihnen die folgenden m Ausdrücke A_μ bilden:

$$A_\mu = \frac{1}{Y_\mu} \sum_{1}^{m} {}^{\nu} Y_{\nu\mu} Y_\nu \; ; \quad \mu = 1, \ldots, m \tag{70}$$

Nur wenn die $Y_{\nu\mu}$ und Y_μ so beschaffen sind, dass diese Ausdrücke

$$A_\mu = A; \quad \mu = 1, \ldots, m \tag{71}$$

also alle einander gleich sind, erfüllen sie die Bedingung (56). Die Konstante A ist dann durch (56) eindeutig definiert und lässt sich aus jeder dieser m Gleichungen berechnen. Wir wollen hier nicht allgemein untersuchen, welche Arten von Schaltungen der Geophongruppe die Bedingung (56) erfüllen. Im folgenden wird lediglich gezeigt, dass auf jeden Fall die sogenannten symmetrischen Schaltungen dieser Bedingung (56) genügen.

Wir wollen eine Geophongruppenschaltung symmetrisch nennen, wenn sie für alle m Geophone genau gleichwertig ist. Anders gesagt: Eine Geophongruppenschaltung heisst dann symmetrisch, wenn man im Schaltungsplan durch blosses Vertauschen gleichartiger seriengeschalteter oder gleichartiger parallelgeschalteter Schaltungsteile jedes Geophon mit jedem anderen Geophon vertauschen kann. Wenn man bei festgeklemmten Geophonspulen im Eingangskreis einen Gleichstrom fliessen lässt, so fliessen bei symmetrischer Schaltung der Geophongruppe in allen m Geophonen genau gleiche Ströme. In Abb. 3

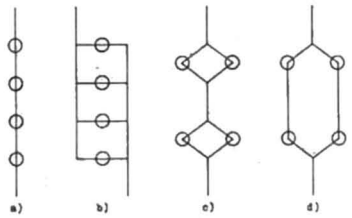

Abb. 3. Symmetrische Schaltungen von vier Geophonen.
Symmetrical connections of four geophones.

sind die symmetrischen Schaltungen aufgezeichnet, die bei einer Geophongruppe aus $m = 4$ Geophonen möglich sind. Zu den symmetrischen Schaltungen gehören alle Serienschaltungen und alle Parallelschaltungen wie in Abb. 3a und 3b; dann aber auch gemischte Schaltungen wie in Abb. 3c und 3d. Je grösser m ist, umso mehr gemischte Schaltungen sind möglich.

Es ist hierbei vorausgesetzt, dass die Leitungswiderstände innerhalb der Schaltung klein sind gegenüber dem Innenwiderstand R_i der einzelnen gleichartigen Geophone, oder aber, dass sich die Leitungswiderstände zu gleichen Teilen auf die einzelnen Geophone verteilen lassen. Im letzteren Falle fänden sie durch eine Korrektur an der Konstanten R_i ihre Berücksichtigung. Der Widerstand der Schaltung setzt sich also nur aus den m gleichen Innenwiderständen R_i der Geophone zusammen. Den Widerstand der Zuleitungen von der Registrierapparatur bis zur Geophongruppe wollen wir mit dem Widerstand des Verstärkereinganges zum Aussenwiderstand R_a der Geophongruppe zusammenfassen. Bei der praktischen Aufstellung der seismischen Apparatur wird somit R_a mehr oder weniger von der Entfernung zwischen der Geophongruppe und der Registrierapparatur abhängen.

Die symmetrische Geophongruppenschaltung ist für alle m Geophone gleichwertig. Diese Symmetrieeigenschaft bedeutet für die Koeffizienten der Schaltungsgleichungen (49) und (50), dass für symmetrische Schaltungen gelten muss:

$$Y_{\nu\mu} = B + D\delta_{\nu\mu}; \quad Y_\mu = E; \quad \nu, \mu = 1, \ldots, m; \quad \delta_{\nu\mu} = \begin{cases} 0; \nu \neq \mu \\ 1; \nu = \mu \end{cases} \tag{72}$$

Darin sind B, D und E Konstante. Wenn diese Beziehungen (72) gelten, dann und nur dann ist gewährleistet, dass kein Geophon in den Gleichungen (49) und (50) und damit auch in der Schaltung vor den anderen Geophonen eine irgendwie ausgezeichnete Rolle spielt. Die Menge der $m^2 + m$ Koeffizienten $Y_{\nu\mu}$ und Y_μ, die zur Beschreibung einer allgemeinen Geophongruppenschaltung erforderlich sind, reduziert sich also für die symmetrischen Schaltungen auf die drei Konstanten B, D und E. Durch Einsetzen von (72) in (56) erkennt man endlich, dass die symmetrischen Schaltungen dieser wichtigen Bedingung (56) genügen. Für die Konstante A folgt

$$A = mB + D \tag{73}$$

Es sei nun darauf hingewiesen, dass in der Regel alle in der Praxis verwendeten Geophongruppen symmetrisch geschaltet sind. So wird zum Beispiel in Deutschland oft eine Gruppe aus 3 parallelgeschalteten Geophonen in Reihenaufstellung verwendet. Das auf (56) gründende wesentlich einfachere Berechnungsverfahren kommt also für die praktisch benutzten Geophongruppen in der Regel immer in Frage.

Wir können auch das Geophon in Einzelaufstellung, das im 1. Abschnitt beschrieben wurde, mit den Formeln für die Geophongruppe behandeln. Dazu fassen wir das Einzelgeophon als eine m-fache Geophongruppe mit $m = 1$ auf und Wählen als seinen Aufstellungsort den Koordinatenursprung. Man kann diesen Fall des Einzelgeophons zu der Gruppe der symmetrischen Schaltungen rechnen, da alle symmetrischen Schaltungen für $m = 1$ in diesen Fall übergehen. Wenn R_i der Innenwiderstand des Geophons ist und R_a der Aussenwiderstand, dann ist der Gesamtwiderstand des Eingangskreises

$$R = R_i + R_a \tag{74}$$

Da für das Einzelgeophon

$$I(\tau) = I_1(\tau); \qquad U(\tau) = U_1(\tau) \tag{75}$$

gilt, so folgt aus (46), (49), (50), (72) und (73)

$$E = A = 1/R \tag{76}$$

Das Dämpfungsmass α_1 ist nach (59), (74) und (76)

$$\alpha_1 = \frac{1}{2M\omega_0}\left(r + \frac{K^2}{R}\right) = \frac{1}{2M\omega_0}\left(r + \frac{K^2}{R_i + R_a}\right) \tag{77}$$

Es ist mit dem Dämpfungsmass α des einzelnen Geophons nach (15) identisch. Wenn wir berücksichtigen, dass nach (34) $\tau_1 = 0$ ist, da das Einzelgeophon im Koordinatenursprung steht, so folgt aus (68), (72) und (76) für die resultierende Ausgangsspannung

$$U(\tau) = K\omega_0 C\, \dot{y}(\tau) \tag{78}$$

mit $\dot{y}(u)$ nach (69). Sie ist wegen (35) mit der Spannung nach (26) identisch.

3. 5) *Beispiele symmetrischer Schaltungen*

Als Beispiele symmetrischer Schaltungen wollen wir zwei m-fache Geophongruppen berechnen, und zwar eine seriengeschaltete entsprechend Abb. 3a und eine parallelgeschaltete entsprechend Abb. 3b.

Im Falle der Serienschaltung ist der Gesamtwiderstand des Eingangskreises

$$R = mR_i + R_a \tag{79}$$

Weiter gilt

$$I(\tau) = I_\nu(\tau); \quad U(\tau) = \sum_1^m{}_\nu\, U_\nu(\tau) \tag{80}$$

Daraus folgt mit Berücksichtigung von (46), (49), (50) und (72)

$$B = E = 1/R; \quad D = 0 \tag{81}$$

Das Dämpfungsmass α_m ist nach (59), (73), (79) und (81)

$$\alpha_m = \frac{1}{2M\omega_0}\left(r + \frac{mK^2}{R}\right) = \frac{1}{2M\omega_0}\left(r + \frac{mK^2}{mR_i + R_a}\right) \tag{82}$$

Aus (68), (72) und (81) ergibt sich jetzt die resultierende Ausgangsspannung zu

$$U(\tau) = K\omega_0 C \sum_1^m{}_\nu\, \dot{y}\{\tau - \tau_\nu\} \tag{83}$$

mit $\dot{y}(u)$ nach (69).

Bei parallelgeschalteter Geophongruppe ist der Gesamtwiderstand des Eingangskreises

$$R = \frac{1}{m} R_i + R_a \tag{84}$$

Die Kirchhoffschen Gesetze liefern die Gleichungen

$$I(\tau) = \sum_1^m{}_\nu\, I_\nu(\tau) \tag{85}$$

und

$$I_\nu(\tau)\, R_i + I(\tau)\, R_a = U_\nu(\tau); \quad \nu = 1, \ldots, m \tag{86}$$

Durch Summation dieser m Gleichungen erhält man bei Berücksichtigung von (84) und (85)

$$I(\tau) = \frac{1}{mR} \sum_{1}^{m}{}_{\mu} U_{\mu}(\tau) \tag{87}$$

Wenn man diesen Ausdruck für $I(\tau)$ in (86) einsetzt, erhält man

$$I_{\nu}(\tau) = \frac{1}{R_i} U_{\nu}(\tau) - \frac{R_a}{mR_iR} \sum_{1}^{m}{}_{\mu} U_{\mu}(\tau); \quad \nu = 1, \ldots, m \tag{88}$$

Durch Vergleich von (88) und (87) mit (49) und (50) folgt über (72)

$$B = -\frac{R_a}{mR_iR}; \quad D = \frac{1}{R_i}; \quad E = \frac{1}{mR} \tag{89}$$

Das Dämpfungsmass α_m ist nach (59), (73), (84) und (89)

$$\alpha_m = \frac{1}{2M\omega_0}\left(r + \frac{K^2}{mR}\right) = \frac{1}{2M\omega_0}\left(r + \frac{K^2}{R_i + mR_a}\right) \tag{90}$$

Die resultierende Ausgangsspannung ergibt sich aus (68), (72) und (89) zu

$$U(\tau) = K\omega_0 C \frac{1}{m} \sum_{1}^{m}{}_{\nu} \dot{y}\{\tau - \tau_{\nu}\} \tag{91}$$

mit $\dot{y}(u)$ nach (69).

Bei der Serienschaltung stellt die resultierende Ausgangsspannung $U(\tau)$ nach (80) die Summe der einzelnen Geophonspannungen $U_{\nu}(\tau)$ dar, bei der Parallelschaltung ist sie nach (46) und (87) ihr arithmetisches Mittel. Für $m = 1$ gehen die Gleichungen (82) und (90) in die Gleichung (77) über, und bei Berücksichtigung von $\tau_1 = 0$ gehen (83) und (91) in (78) über. Im Falle $m \neq 1$ stimmen die beiden Dämpfungsmasse α_m nach (82) beziehungsweise (90) in den beiden Grenzfällen $R_a \to 0$ und $R_a \to \infty$ mit dem Dämpfungsmass α_1 des einzelnen Geophons nach (77) überein. Im allgemeinen ist aber bei konstantem R_a das Dämpfungsmass der serien- beziehungsweise parallelgeschalteten Geophongruppe grösser beziehungsweise kleiner als das des Einzelgeophons, und zwar umso mehr, je grösser m ist. In Abb. 4 ist die Abhängigkeit des Dämpfungsmasses α_m vom Aussenwiderstand R_a für einen in der Praxis verwendeten Geophontyp graphisch dargestellt. Als Mass für den Aussenwiderstand ist dort das Verhältnis

$$\sigma = R_a/R_i \tag{92}$$

benutzt. Die ausgezogenen Kurven sind nach (90) berechnet und gelten für

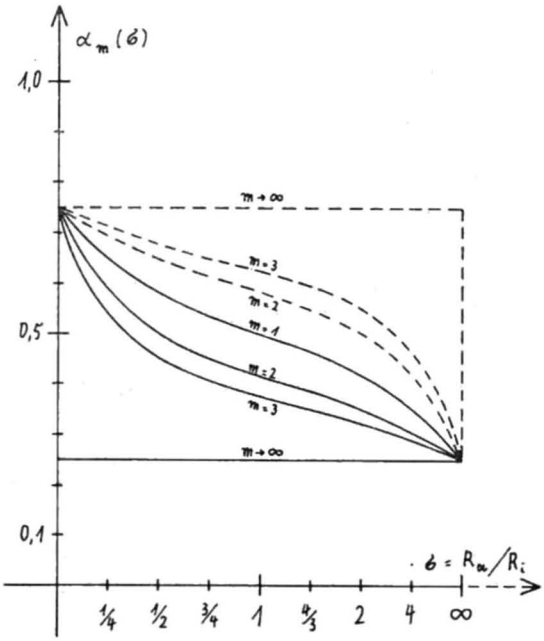

Abb. 4. Dämpfungsmass α_m als Funktion von R_a für Geophone mit den Daten nach (93); ..... Serienschaltung, _____ Parallelschaltung.
Damping constant α_m as function of R_a for geophones having properties as in eq. (93); ..... series connection, _____ parallel connection

die Parallelschaltung, die gestrichelten Kurven nach (82) gelten für die Serienschaltung. In Abb. 4 ist als lineare Abszisse im Intervall von 0 bis 1 σ selber aufgetragen, im Intervall von 1 bis 2 jedoch $(2\text{-}1/\sigma)$. In dieser Darstellung ist die Kurvenschar für die Serienschaltung das am Punkte $(m = 1;\ \sigma = 1)$ gespiegelte Bild der Kurvenschar für die Parallelschaltung. Die Daten des bei der Berechnung benutzten Geophontyps sind

$$\left.\begin{array}{lll} M = 0{,}028\ [kg] & ; & K^2 = 886{,}7\ [m^{-2}\, s^2\, V^2] \\ r\ = 2{,}111\ [kg\, s^{-1}] & ; & R_i\ = 210\ \ [VA^{-1}] \\ \omega_0 = 150{,}8\ [s^{-1}] & ; & \end{array}\right\} \qquad (93)$$

4. Abschnitt: Die Geophongruppe als Superpositionssystem

4. 1) *Registrierbarkeit seismischer Impulse*

Wie in der Einleitung bereits erwähnt wurde, wollen wir in dieser Arbeit nicht die Gründe untersuchen, die überhaupt dazu führen, dass in der Praxis Mehrfachaufstellungen von Geophonen angewandt werden. Solche Gründe sind zum Beispiel die Abschwächung der störenden Wirkungen von Ober-

flächenwellen und die Verbesserung des Amplitudenverhältnisses von Nutz- zu Störsignal (signal-to-noise-ratio) [1]). Das Hauptziel für uns besteht nur darin, die direkten Konsequenzen der Mehrfachaufstellung für die blosse Registrierung der Nutzwellen zu untersuchen. Hierbei wird also von der störungsabschwächenden Wirkung der Geophongruppe abgesehen, die indirekt natürlich auch eine Konsequenz, nämlich einen Vorteil der Mehrfachaufstellung für die Registrierung der Nutzwellen darstellt. Als Nutzwellen wollen wir alle Wellen bezeichnen, die sich im Aufstellungsbereich der Geophongruppe durch (28) hinreichend genau beschreiben lassen. Das gilt natürlich nur vom Standpunkt dieser Untersuchung aus. Die wirklichen Nutzwellen, nämlich die an tieferen, markanten Horizonten reflektierten Wellen, fallen jedenfalls darunter; hingegen werden die Störwellen, die durch Beugung, Reflexion oder Brechung an oberflächennahen Inhomogenitäten im Untergrund entstehen, durch diese Definition ausgeschlossen.

Die Hauptfrage stellt sich in der Form, ob bei Anwendung der Mehrfachaufstellung ($m > 1$) gegenüber den Verhältnissen bei der Einzelaufstellung ($m = 1$) die Registrierbarkeit einer ankommenden Nutzwelle (28) verbessert oder verschlechtert wird. Diese Registrierbarkeit und ihre Qualität sind in der Seismik recht schwierige Begriffe und sind quantitativ nicht leicht zu erfassen. Man kann sich in solchen Fällen nur mit Definitionen helfen, deren Zweckmässigkeit sich im Laufe der Untersuchung erweisen muss. Wir wollen das Mass für die Registrierbarkeit mit Hilfe der Energie

$$Q_m = \int_{-\infty}^{\infty} L_m(t)\, dt \tag{94}$$

definieren, wobei $L_m(t)$ die Stromleistung im Eingangskreis ist. Die Energie Q_m ist die gesamte elektrische Energie, die im Eingangskreis umgesetzt wird, wenn die m-fache Geophongruppe durch die Welle (28) erregt wird. Es ist mit τ als Zeitvariable

$$L_m(\tau) = \frac{1}{R_m} U_m^2(\tau) \tag{95}$$

Mit dem Index m an den verschiedenen Grössen wollen wir von jetzt ab immer besonders darauf hinweisen, dass sie sich auf den Fall der m-fachen Geophongruppe beziehen. Das gilt auch für die Grössen, die wie R und U bisher ohne Index geschrieben wurden. Wegen (16) folgt aus (94) und (95)

$$Q_m = \frac{1}{\omega_0 R_m} \int_{-\infty}^{\infty} U_m^2(\tau)\, d\tau \tag{96}$$

[1]) s. LOMBARDI (1955).

Bei Erregung der Geophongruppe durch einen physikalisch sinnvollen Impuls muss dieses Integral (96) aus physikalischen Gründen existieren. Später wird im Abschnitt 4. 4 gezeigt werden, dass die Bedingung (31) für die Wellenfunktion hinreichend ist, um die Existenz von Q_m nach (96) zu gewährleisten. Dieser Zusammenhang ist der Grund, warum im Abschnitt 2. 2 der seismische Impuls für unsere Untersuchung mit Hilfe der Beziehung (31) definiert wurde.

Wie bereits erwähnt, sind die Gesichtspunkte recht vielgestaltig, nach denen vom Standpunkt der Praxis aus eine Spannungsfunktion $U(\tau)$ in bezug auf die Registrierung und vor allem mit Rücksicht auf die Erkennbarkeit der Registrierung im Seismogramm beurteilt wird. Deswegen ist es auch schwierig, für diese Beurteilung eine geeignete mathematische Formulierung zu finden. Zum Beispiel spielt bei der Beurteilung der Funktion $U(\tau)$ oft der Betrag ihres grössten Extremwertes, mit dem sie aus dem Störpegel des Seismogramms am meisten herausragt, eine grössere Rolle als die Energie Q_m. Man könnte einer solchen Betrachtungsweise, die mehr die Form als die „Stärke" der Funktion $U(\tau)$ berücksichtigt, unter Umständen neben Q_m nach (94) den Wert des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} L_m^n(t)\, dt; \quad n > 1$$

zugrunde legen. Je grösser n gewählt wird, ein umso grösseres Gewicht wird bei der Beurteilung von $U(\tau)$ auf das Formmoment gelegt. Wir wollen diesen Gedanken hier aber nicht weiter verfolgen. Vielmehr wollen wir die folgenden Betrachtungen darauf beschränken, von der Gleichung (94) ausgehend die Geophongruppe als ein Superpositionssystem zu behandeln und interferenzähnliche Superpositionseffekte zu untersuchen.

4. 2) *Definition des Superpositionsmasses*

Bei der Anwendung des Begriffes „Superposition" könnte man meinen, es handele sich bei der Geophongruppe und ihrer resultierenden Ausgangsspannung um eine einfache Addition von Beiträgen, die von den einzelnen Geophonen geliefert würden. Eine solche Meinung wäre unzutreffend, denn es lässt sich wegen der Kopplung der Geophone gar nicht genau angeben, was unter dem Gesamtbeitrag eines einzelnen Geophons der Gruppe überhaupt verstanden werden soll. Die Spannung $U_\nu(\tau)$ ist nicht repräsentativ für den Beitrag des ν-ten Geophons. Vielmehr hängt jede Spannung $U_\nu(\tau)$ indirekt von der Bewegung aller Geophone ab. Weiter handelt es sich wegen der Koeffizienten Y_μ in (50), die im allgemeinen Falle verschieden voneinander sind, auch nicht um eine einfache Addition, die in Verbindung mit (46) von

den $U_\nu(\tau)$ zur resultierenden Ausgangsspannung $U(\tau)$ führt. Man muss die Geophongruppe als ein Ganzes im strengen Wortsinne auffassen und behandeln und nicht als eine blosse Summe von m Geophonen. Superposition bedeutet hier also lediglich die Tatsache, dass alle m Geophone der Geophongruppe zum Zustandekommen der resultierenden Ausgangsspannung $U(\tau)$ irgendwie beitragen und dass dieser Zusammenhang wie die Gleichungen (49) und (50) vom ersten Grade ist. Diese Linearität des Problems ist aber das Entscheidende. Dadurch kommt es bei der Geophongruppe zu den für Superpositionssysteme charakteristischen interferenzähnlichen Effekten.

Der Superpositionseffekt besteht darin, dass bei einer fest vorgegebenen Impulsfunktion $f(u)$ und einer fest vorgegebenen Geophongruppe je nach der Richtung $\mathfrak{s}$ des seismischen Impulses (28) die Energie Q_m nach (96) grösser, gleich oder kleiner als die Energie Q_1 ist, die im Eingangskreis umgesetzt würde, wenn die Geophongruppe durch ein einziges Geophon im Koordinatenursprung ersetzt würde. In den beiden Vergleichsfällen der m-fachen und der „einfachen" Geophongruppe soll jedesmal der gleiche Aussenwiderstand R_a angenommen werden, so dass R_a nicht durch einen Index m unterschieden zu werden braucht. Der Superpositionseffekt hängt nur von der Richtung $\mathfrak{s}$ der Impulswelle (28) und damit nach Abb. 1 nur von den beiden Winkelkoordinaten δ und φ ab.

Es liegt nahe, als Mass für den Superpositionseffekt den Quotienten der Energien Q_m/Q_1 zu wählen. Es ist aber doch so, dass nach aussen nicht die ganze Energie Q_m zur Verfügung steht. Die Energie, die in dem Innenwiderstand R_m-R_a der m-fachen Geophongruppe umgesetzt wird, geht für die Registrierung von vorneherein verloren. Wenn man die Geophongruppe als Stromquelle mit dem Innenwiderstand R_m-R_a im Eingangskreis auffasst, so kann diese Stromquelle nach aussen höchstens die Energie

$$Q_{am} = \frac{R_a}{R_m} Q_m \tag{97}$$

abgeben. Da es aber darauf ankommt, den Superpositionseffekt mit Rücksicht auf die tatsächliche Registrierbarkeit der Wellen zu definieren, erscheint es sinnvoller, als Mass den Quotienten Q_{am}/Q_{a1} zu wählen. Da weiter für die meisten Registrierverfahren ein strom- oder spannungsproportionales Mass zweckmässiger und anschaulicher sein dürfte als ein energieproportionales Mass, wollen wir nicht diesen Quotienten selber, sondern seine Quadratwurzel als Superpositionsmass h nehmen:

$$h = h\,(\delta, \varphi) = \underset{+}{\sqrt{\frac{Q_{am}}{Q_{a1}}}} = \underset{+}{\sqrt{\frac{R_1 Q_m}{R_m Q_1}}} \tag{98}$$

Die Spannung, die im Eingangskreis am Aussenwiderstand R_a abfällt, die

also höchstens von der Geophongruppe nach aussen abgegeben werden kann, ist

$$U_{am}(\tau) = \frac{R_a}{R_m} U_m(\tau) \tag{99}$$

Mit dieser Spannung kann man wegen (96) und (98) das Superpositionsmass h auch folgendermassen schreiben:

$$h = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} U_{am}^2(\tau)\, d\tau} \Big/ \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} U_{a1}^2(\tau)\, d\tau} \tag{100}$$

Auf diese Form für h werden wir im Abschnitt 5. 2 zurückgreifen.

Zusammenfassend sei zum Verständnis des Superpositionseffektes nochmals erwähnt: Der Superpositionseffekt bedeutet für die Registrierung des erregenden seismischen Impulses einen direkten Vorteil, wenn $h > 1$ und einen direkten Nachteil wenn $h < 1$ ist. Beides gilt umso mehr, je grösser der Betrag $|h - 1|$ ist.

4. 3) *Superpositionsmass bei symmetrischer Schaltung*

Wir wollen nun voraussetzen, dass die Geophongruppe symmetrisch geschaltet ist. Die Energie Q_m ist dann nach (68), (72) und (96)

$$Q_m = R_m K^2 \omega_0 C^2 F_m \tag{101}$$

wo F_m folgende Abkürzung bedeutet:

$$F_m = F_m(\tau_\nu) = E_m^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_1^m {}^\nu \dot{y}\{\tau - \tau_\nu\} \right]^2 d\tau; \quad m \geqslant 1 \tag{102}$$

Aus (98) und (101) folgt jetzt für das Superpositionsmass

$$h = h(\tau_\nu) = \sqrt[+]{\frac{1}{F_1} F_m(\tau_\nu)} \tag{103}$$

In (101) ist F_m nach (102) eine Funktion der τ_ν und nur über diese nach (34) eine Funktion der Winkelkoordinaten δ und φ. Bei der Bildung von h kürzt sich der Faktor C, der in (101) noch vorkommt, heraus. Der nach (32) von δ und φ abhängige Faktor C bedeutet wegen (33), dass nur die Vertikalkomponente der Welle (28) als Erregung wirksam wird. Die Tatsache, dass die Geophone Vertikalseismographen sind, und die dadurch gegebene Richtungsabhängigkeit spielt also für die Richtungsabhängigkeit des Superpositionseffektes keine Rolle. Das Superpositionsmass h ist nur über die τ_ν eine Funktion der Koordinaten δ und φ. Deshalb haben wir in (103) anders als in (98) h als Funktion der τ_ν geschrieben.

Wenn die Impulsfunktion einen von ihr abtrennbaren und von u unabhängigen Faktor enthält, so wollen wir diesen Faktor wegen der Analogie zur Amplitude einer harmonischen Schwingung die "Quasiamplitude" der Impulsfunktion $f(u)$ nennen. Denkt man sich jetzt in den Gleichungen (35) diese Quasiamplitude multiplikativ mit in den Faktor C hineingenommen, so sieht man, wie sie sich bei der Bildung von h nach (103) mit C wegkürzt. Das Superpositionsmass h ist also unabhängig von der Quasiamplitude des erregenden seismischen Impulses. In der Praxis zeigen die im Laufe der Registrierzeit eines Seismogramms eintreffenden Reflexionsimpulse eine starke Abnahme ihrer Quasiamplitude. Von einer solchen Abnahme bliebe h unbeeinflusst. Das ist durchaus wünschenswert, da das Superpositionsmass so weit wie möglich eine reine Eigenschaft der Geophongruppe beschreiben soll.

Bei der Ableitung von F_1 aus (102) muss bedacht werden, dass das Einzelgeophon im Koordinatenursprung stehen soll und daher nach (27) und (34) das zugehörige $\tau_1 = 0$ wird. Weiter kann man wegen der Anfangsbedingung (66) in dem Integral Null als untere Integrationsgrenze nehmen. Mit E_1 nach (76) folgt somit

$$F_1 = \frac{1}{R_1^2} \int_0^\infty \left[\dot{y}_{(1)}(u) \right]^2 du = const. \tag{104}$$

F_1 ist nicht von den τ_ν abhängig und somit für unser Problem eine Konstante. Deshalb haben wir F_1 auch in (103) bereits als Konstante geschrieben. Der Index bei $y_{(1)}(u)$ in (104) bedeutet, dass zur Berechnung von $y_{(1)}(u)$ nach (69) das Dämpfungsmass α_1 nach (77) benutzt werden muss.

Für $m \neq 1$ lässt sich das Integral (102) nach der Formel

$$\left(\sum_1^m {}_\nu \, a_\nu \right)^2 = \sum_1^m {}_\nu \, a_\nu^2 + 2 \sum_1^{m-1} {}_\mu \sum_1^{m-\mu} {}_\nu \, a_\nu \, a_{\nu+\mu} \tag{105}$$

in eine Summe einfacherer Integrale zerlegen. Es ist

$$F_m = E_m^2 \left(\sum_1^m {}_\nu \, P_{\nu 0} + 2 \sum_1^{m-1} {}_\mu \sum_1^{m-\mu} {}_\nu \, P_{\nu\mu} \right) \tag{106}$$

wo die $P_{\nu\mu}$ folgende Integrale bedeuten:

$$P_{\nu\mu} = \int_{-\infty}^{\infty} y\{\tau - \tau_\nu\} \, \dot{y}\{\tau - \tau_{\nu+\mu}\} \, d\tau; \quad \mu = 0, 1, \ldots, m\text{-}1; \quad \nu = 1, \ldots, m\text{-}\mu \tag{107}$$

Ist $\tau_\nu > \tau_{\nu+\mu}$, so kann man (107) durch Einführung der neuen Integrationsvariablen $u = \tau\text{-}\tau_\nu$ umformen in

$$P_{\nu\mu} = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{y}(u)\, \dot{y}\{u + \tau_\nu - \tau_{\nu+\mu}\}\, du; \quad \tau_\nu > \tau_{\nu+\mu} \tag{108}$$

Für $\tau_\nu < \tau_{\nu+\mu}$ folgt nach Einführung der Integrationsvariablen $u = \tau - \tau_{\nu+\mu}$ aus (107)

$$P_{\nu\mu} = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{y}(u)\, \dot{y}\{u + \tau_{\nu+\mu} - \tau_\nu\}\, du; \quad \tau_{\nu+\mu} > \tau_\nu \tag{109}$$

Wegen (108) und (109) kann man aus (107) folgern

$$P_{\nu\mu} = \int_{0}^{\infty} \dot{y}(u)\, \dot{y}\{u + |\tau_{\nu+\mu} - \tau_\nu|\}\, du; \quad \mu = 0, 1, \ldots, m\text{-}1; \quad \nu = 1, \ldots, m\text{-}\mu \tag{110}$$

Dabei kann die untere Grenze des Integrals gleich Null gesetzt werden, weil der Integrand nach der Anfangsbedingung (66) für alle negativen u verschwindet.

Man sieht in (110), dass die Integrale $P_{\nu 0}$ von den τ_ν und damit auch von ν unabhängig werden und einander gleich sind. Es ist also

$$P_{\nu 0} = P_0 = \int_{0}^{\infty} [\dot{y}(u)]^2\, du = \text{const.} > 0; \quad \nu = 1, \ldots, m \tag{111}$$

eine Konstante unseres Problems. Aus (106) wird jetzt

$$F_m = E_m^2 \left(m P_0 + 2 \sum_{1}^{m-1}{}_{\mu} \sum_{1}^{m-\mu}{}_{\nu} P_{\nu\mu} \right) \tag{112}$$

Im Falle symmetrischer Schaltung der Geophongruppe erfolgt also die Berechnung des Superpositionsmasses h über die Gleichungen (103), (104), (110), (111) und (112).

4. 4) *Existenzuntersuchung*

Wir erreichen einen Vergleich der Integrale $P_{\nu\mu}$ mit der positiven Konstanten P_0, wenn wir auf (110) die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung anwenden:

$$P_{\nu\mu}^2 \leqslant \int_{0}^{\infty} [\dot{y}(u)]^2\, du \int_{0}^{\infty} [\dot{y}\{u + |\tau_{\nu+\mu} - \tau_\nu|\}]^2\, du \tag{113}$$

Andererseits gilt wegen (111)

$$\int_0^\infty [\dot{y}\{u + |\tau_{\nu+\mu} - \tau_\nu|\}]^2\, du = \int_{|\tau_{\nu+\mu}-\tau_\nu|}^\infty [\dot{y}(u)]^2\, du \leqslant P_0 \tag{114}$$

so dass hieraus mit (111) und (113) für die $P_{\nu\mu}$ die Abschätzung

$$P_{\nu\mu} \leqslant P_0; \quad \mu = 0, 1, \ldots, m\text{-}1; \quad \nu = 1, \ldots, m\text{-}\mu \tag{115}$$

folgt.

Mit Hilfe dieser Beziehung können wir jetzt den bereits im Abschnitt 4. 1 angekündigten Nachweis führen, dass die Bedingung (31) für die Wellenfunktion $f(u)$ hinreichend ist, um die Existenz von Q_m nach (96) zu sichern. Wenn das Integral P_0 nach (111) existiert, dann folgt aus (115) die Existenz aller Integrale $P_{\nu\mu}$ nach (110). Dann existieren aber auch F_m nach (112) und schliesslich Q_m wegen (101). Wir brauchen also nur nachzuweisen, dass P_0 existiert wenn die Bedingung (31) erfüllt ist.

Bei der Behandlung des Einzelgeophons im Abschnitt 1.2 wurde angenommen, dass die Erregungsfunktion $z(\tau)$ stetig und stückweise glatt ist, dass weiterhin die Funktion selbst und ihre erste Ableitung dem Betrage nach beschränkt sind. Daraus ergaben sich bei der Diskussion der Gleichungen (9) beziehungsweise (18) für die Funktion $x(\tau)$ die gleichen Eigenschaften wie für $z(\tau)$. Im Abschnitt 2. 2 haben wir für die Wellenfunktion $f(u)$ ebenfalls diese Eigenschaften gefordert, was auch in den Gleichungen (35) zum Ausdruck kommt. Nun haben die Differentialgleichungen (18) und (65) mathematisch dieselbe Gestalt; hieraus folgt, dass auch die Funktion $y(u)$ stetig und stückweise glatt ist, dass weiterhin die Funktion selbst und ihre erste Ableitung $\dot{y}(u)$ dem Betrage nach beschränkt sind.

Wenn man die Gleichung (65) mit $\dot{y}(u)$ multipliziert, so folgt

$$2\alpha_m [\dot{y}(u)]^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{du}\left\{[\dot{y}(u)]^2 + [y(u)]^2\right\} = -\,\dot{y}(u)\,\ddot{f}(u) \tag{116}$$

Die Integration dieser Gleichung über u von 0 bis ∞ ergibt bei Berücksichtigung von (111)

$$2\,\alpha_m P_0 + \mathfrak{A} = -\int_0^\infty \dot{y}(u)\,\ddot{f}(u)\, du \tag{117}$$

wobei $\mathfrak{A}$ folgende Abkürzung bedeutet:

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}\left\{[\dot{y}(u)]^2 + [y(u)]^2\right\}\Big|_0^\infty \tag{118}$$

Wegen der Beschränktheit von $|y(u)|$ und $|\dot{y}(u)|$ hat $\mathfrak{A}$ einen endlichen Wert.

Wenn in (117) der Betrag der linken Seite endlich ist, dann existiert auch P_0. Für diesen Betrag gilt aber die Abschätzung

$$|\, 2\,\alpha_m\, P_0 + \mathfrak{A}\,| \leqslant \int_0^\infty |\dot{y}(u)|\;|\ddot{f}(u)|\;du \leqslant \operatorname{Max}|\dot{y}(u)| \int_0^\infty |\ddot{f}(u)|\;du \tag{119}$$

wobei $\operatorname{Max}|\dot{y}(u)|$ der Maximalwert von $|\dot{y}(u)|$ ist, der ja laut Voraussetzung existiert. Man sieht, dass P_0 und damit auch Q_m nach (96) tatsächlich existieren, wenn für $f(u)$ die Bedingung (31) erfüllt ist. Das gilt auch für F_1 nach (104) und Q_1.

4. 5) *Superpositionsmass bei Reihenaufstellung*

Die Formeln zur Berechnung des Superpositionsmasses für eine symmetrisch geschaltete Geophongruppe wollen wir jetzt für den Fall spezialisieren, dass die Geophongruppe gemäss (42) in Reihe aufgestellt sei. Es folgt dann mit (43) aus (110)

$$P_{\nu\mu} = P_\mu = P_\mu(\tau_0) = \int_0^\infty \dot{y}(u)\;\dot{y}\{u + \mu\tau_0\}\,du;\;\; \mu = 0,1,\ldots m\text{-}1;\; \nu = 1,\ldots,m\text{-}\mu \tag{120}$$

Im Falle der Reihenaufstellung werden also die Integrale $P_{\nu\mu}$ auch für $\mu \neq 0$ vom Index ν unabhängig, weswegen sie in (120) einfach P_μ genannt wurden. Die Gleichung (111) ist in (120) mit enthalten.

Wegen (111) ist die Anzahl der im allgemeinen verschiedenen Integrale $P_{\nu\mu}$ in (110) $\binom{m}{2} + 1$. Für die Reihenaufstellung reduziert sich diese Menge auf die m Integrale P_μ in (120). Der Umfang der praktischen Rechenarbeit bei der Berechnung von h ist also für die Reihenaufstellung geringer als im allgemeinen Falle, und zwar gilt das umso mehr, je grösser die Anzahl m der Geophone in der Geophongruppe ist. Aus (112) folgt mit den Integralen P_μ nach (120) für die Reihenaufstellung die einfachere Gleichung:

$$F_m = F_m(\tau_0) = E_m^2 \left[m\,P_0 + 2 \sum_1^{m-1}{}^{\mu} (m\text{-}\mu)\, P_\mu \right] \tag{121}$$

Die P_μ und F_m hängen alle nur noch von der einen Laufzeitdifferenz τ_0 ab. Nach (44) hängt τ_0 seinerseits nur von der einen Richtungskoordinate φ ab und ist von δ unabhängig. Aus der speziellen Wahl der Koordinaten φ und δ zur Beschreibung der Fortpflanzungsrichtung der seismischen Wellen im Abschnitt 2.3 erwächst also hier für die Reihenaufstellung der grosse Vorteil, dass das Superpositionsmass

$$h = h(\tau_0) = \sqrt[+]{\frac{1}{F_1} F_m(\tau_0)} = h(\varphi) \tag{122}$$

nur eine Funktion der einen Richtungskoordinate φ ist. Wegen (44) gilt für das Superpositionsmass die Symmetriebeziehung:

$$h(\varphi) = h\{\pi - \varphi\} \tag{123}$$

Wir brauchen also im Falle der Reihenaufstellung die Funktion $h(\varphi)$ lediglich im Bereich $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$ zu untersuchen, um den Superpositionseffekt für alle Richtungen $\mathfrak{z}$ der ankommenden Wellen zu kennen.

Für $\tau_0 = 0$, wenn also nach (44) $\varphi = \pi/2$ ist, werden die P_μ in (120) alle gleich P_0. Aus (121) folgt dann mit Hilfe der Formel

$$\sum_1^n k = \frac{1}{2} n (n + 1) \tag{124}$$

die Beziehung

$$F_m(0) = m^2 E_m^2 P_0 \tag{125}$$

Das Superpositionsmass $h(\tau_0)$ nimmt nach (122) an dieser Stelle den Wert

$$h(0) = h_0 = m E_m \sqrt[+]{\frac{P_0}{F_1}} \tag{126}$$

an. Da nach (115) und (120) P_0 der grösste Wert ist, den die P_μ annehmen können, ist dieser Wert h_0 das absolute Maximum des Superpositionseffektes. Durch eine entsprechende Überlegung kann man zeigen, dass h_0 nach (126) auch für den im vorigen Abschnitt 4.3 behandelten Fall der beliebigen Aufstellung der Geophongruppe das absolute Maximum des Superpositionseffektes darstellt. Allerdings nimmt h dann diesen Wert nur für die vertikale Richtung $\varphi = \pi/2$; $\delta = 0$ an, weil die Laufzeitdifferenzen nach (34) nur für diese Richtung alle verschwinden. Man kann die Grösse h_0 dazu benutzen, um bei fest vorgegebener Impulsform verschiedene Geophongruppenschaltungen in ihrer Superpositionswirkung miteinander zu vergleichen. Insbesondere können bei der Serien- und Parallelschaltung die Verhältnisse bei Änderung der Anzahl m der Geophone untersucht werden. Man darf dann aus (126) keine einfache Proportionalität zwischen h_0 und m herauslesen, da m auch noch in E_m enthalten ist und ausserdem über das Dämpfungsmass α_m nach (69) und (111) in die Berechnung von P_0 eingeht.

Wir wollen jetzt noch klären, ob die Funktion $h(\varphi)$ an der Stelle $\varphi = \pi/2$, also an der Stelle ihres absoluten Maximums glatt ist, oder ob sie dort eine Ecke hat. Nach (44) und (123) ist diese Frage gleichbedeutend damit, ob die

Ableitung $d\,h(\tau_0)/d\tau_0$ an der Stelle $\tau_0 = 0$ verschwindet oder nicht. Aus (122) folgt bei Berücksichtigung von (121) durch Differentiation nach τ_0:

$$\frac{d\,h(\tau_0)}{d\tau_0} = \frac{E_m^2}{F_1\,h(\tau_0)} \sum_{1}^{m-1}{}^{\mu} (m-\mu) \frac{d\,P_\mu(\tau_0)}{d\tau_0} \tag{127}$$

Durch Differentiation von (120) erhält man

$$\frac{d\,P_\mu(\tau_0)}{d\,\tau_0} = \mu \int_0^\infty \dot{y}(u)\,\ddot{y}\{u + \mu\tau_0\}\,du \tag{128}$$

Dieses Integral lässt sich an der Stelle $\tau_0 = 0$ leicht ausrechnen, indem man $\dot{y}(u)$ als neue Integrationsvariable substituiert. Es folgt mit Rücksicht auf (66)

$$\left[\frac{d\,P_\mu(\tau_0)}{d\tau_0}\right]_{\tau_0=0} = \frac{\mu}{2}\left[\dot{y}\,(u)\right]^2\Bigg|_0^\infty = -\frac{\mu}{2}\left[\dot{f}\,(+\,0)\right]^2 \tag{129}$$

Es muss nämlich $\dot{y}(u)$ für $u \to \infty$ verschwinden, weil sonst P_0 nach (111) nicht existieren würde. Nach den Ausführungen im Abschnitt 4. 4 ist aber die Existenz von P_0 durch die Bedingung (31) gesichert. Mit Benutzung von (124) und der Formel

$$\sum_{1}^{n}{}^{k} k^2 = \frac{1}{6}\,n\,(n+1)\,(2\,n+1) \tag{130}$$

ergibt sich aus (127) und (129)

$$\left[\frac{d\,h(\tau_0)}{d\,\tau_0}\right]_{\tau_0=0} = -\binom{m+1}{3}\frac{E_m^2}{2F_1h_0}\,[\dot{f}(+\,0)]^2 \tag{131}$$

Die Funktion $h(\varphi)$ hat also an der Stelle $\varphi = \pi/2$ dann und nur dann keine Ecke, wenn auch die Impulsfunktion $f(u)$ an der Stelle $u = 0$ glatt ist. Aus den Ausführungen über die Erregungsfunktion $z(t)$ im Abschnitt 1.2 geht hervor, dass dies unter natürlichen Umständen immer der Fall ist. Es wurde dort für $z(t)$ und später im Abschnitt 2.2 entsprechend für $f(u)$ nur deshalb keine Differenzierbarkeit an der Stelle $t = 0$ beziehungsweise $u = 0$ gefordert, damit in Berechnungsbeispielen auch einfache Impulsfunktionen gewählt werden können, für die diese Bedingung nicht erfüllt ist. Eine solche Impulsfunktion ist beispielsweise die gedämpfte Schwingung (221), mit der das Beispiel des 6. Abschnittes berechnet wird. Wenn sich also in solchen Berechnungsbeispielen ergibt, dass $h(\varphi)$ für $\varphi = \pi/2$ eine Ecke hat, so ist das für die wirklichen Verhältnisse nicht bedeutsam und hat seine Ursache lediglich im Modellcharakter des Beispiels.

Mit der Definition, Berechnung und Untersuchung des Masses h für den Superpositionseffekt einer Geophongruppe als Funktion der Richtung $\mathfrak{z}$, aus der die erregenden Wellen eintreffen, ist eigentlich das Hauptziel dieser Arbeit erreicht. Nach dem entwickelten Verfahren lassen sich jetzt mit Rücksicht auf die gemachten Voraussetzungen spezielle Geophongruppen mit bestimmten Erregungen behandeln. Für die Interessen der Praxis würde man dabei besonders die Richtungen bestimmen, für die das Superpositionsmass h Extremwerte annimmt. Weiter würde man die Raumwinkel suchen, in denen der Superpositionseffekt im Sinne von Abschnitt 4. 1 vorteilhaft oder nachteilig ist, wo also das Superpositionsmass $h > 1$ oder $h < 1$ ist. Ein solches Beispiel wird im 6.Abschnitt vorgeführt werden.

An dieser Stelle sei nochmals besonders darauf hingewiesen, dass die Impulsfunktion $f(u)$ über die im Abschnitt 2. 2 gemachten Voraussetzungen hinaus völlig beliebig sein kann. Weiter sind bei allen Untersuchungen immer die vollständigen Lösungen der auftretenden Differentialgleichungen verwendet worden. Alle Einschwingvorgänge — soweit man bei impulsförmiger Erregung überhaupt davon sprechen kann — wurden also mit berücksichtigt. Hier liegt der Hauptunterschied der vorliegenden Untersuchung gegenüber den bisherigen Arbeiten [1]), in denen nur Interferenzeffekte bei Geophonengruppen mit stationärer, sinusförmiger Erregung ohne Berücksichtigung der Einschwingvorgänge behandelt wurden.

5. Abschnitt: Interferenz bei stationärer, sinusförmiger Erregung

5. 1) *Übergang von impulsförmiger zu stationärer Erregung*

Der Fall der stationären, sinusförmigen Erregung hat für die Praxis nur theoretischen Wert. Er liesse sich nur auf Schütteltischen einigermassen verwirklichen. In diesem Abschnitt wollen wir jedoch diesen stationären Fall vom Standpunkt unserer bisherigen Überlegungen aus behandeln. Einmal, um den Anschluss an die bereits erwähnte Literatur zu gewinnen. Zweitens wollen wir damit zeigen, wie die Beschreibung des Superpositionseffektes mittels (98) auch im Falle der stationären, sinusförmigen Erregung, für den die Bedingung (31) nicht mehr erfüllt ist, angewandt werden kann und wie sie dann übergeht in die gewöhnlichen Aussagen über Interferenzerscheinungen bei periodischen Vorgängen.

Wir betrachten die Erregung einer symmetrisch geschalteten Geophongruppe durch eine sinusförmige Welle mit der Wellenfunktion

[1]) Johnson (1939), Hales and Edwards (1955), Parr and Mayne (1955), Lombardi (1955), Reynolds (1954).

$$\left.\begin{aligned} f(u) &= \sin \varkappa u; \quad 0 \leqslant u \leqslant \frac{\rho\pi}{\varkappa} \\ f(u) &= 0 \quad ; \quad u \leqslant 0; u \geqslant \frac{\rho\pi}{\varkappa} \end{aligned}\right\} \tag{132}$$

ρ ist positiv und ganzzahlig und zählt die Ausschwingungen, also die halben Sinusschwingungen, aus denen der Wellenzug besteht. Solange ρ eine endliche Zahl ist, ist die Bedingung (31) erfüllt. Die Welle ist dann ein Sinusimpuls nach Abschnitt 7.2 und nicht stationär. Wenn $\rho \to \infty$ geht, bedeutet (132) für grosse u eine stationäre, sinusförmige Erregung. Die Bedingung (31) ist dann nicht mehr erfüllt. Da nach den Ausführungen im Abschnitt 4.3 die Quasiamplitude einer Impulsfunktion für das Superpositionsmass ohne Bedeutung ist, wurde sie in (132) gleich eins gesetzt. Nach (16) und (36) ist $\varkappa = \omega/\omega_0$ das Verhältnis der Kreisfrequenz ω der erregenden Wellen zu der Resonanzkreisfrequenz ω_0 der Geophone. Bei endlichem ρ ist die Lösung von (65) mit (132) nach (209) und (210)

$$\dot{y}(u) = \frac{\varkappa^3}{N_m} \sin\{\varkappa u + \varepsilon_m\} + e^{-\alpha_m u}(c_3 \sin \beta u + c_4 \cos \beta u); \quad 0 < u < \frac{\rho\pi}{\varkappa} \tag{133}$$

$$\dot{y}(u) = e^{-\alpha_m u}(c_5 \sin \beta u + c_6 \cos \beta u) \quad ; \quad u > \frac{\rho\pi}{\varkappa} \tag{134}$$

Dabei ist zu beachten, dass bei der Berechnung der einzelnen Grössen nach (201) beziehungsweise (210) das Dämpfungsmass α_m nach (59) benutzt werden muss. Bei N_m und ε_m ist durch den Index m darauf besonders hingewiesen. Der Phasenwinkel ε_m berechnet sich nach (210) über die Gleichungen

$$\cos \varepsilon_m = \frac{N_m}{\varkappa^3} c_1; \quad \sin \varepsilon_m = \frac{N_m}{\varkappa^3} c_2 \tag{135}$$

Im Falle der stationären Erregung, wenn also in (132) $\rho \to \infty$ geht, verschwindet das Definitionsintervall und damit auch die Bedeutung der Gleichung (134). Die Gleichung (133) bestimmt dann $\dot{y}(u)$ allein für alle positiven u. Im folgenden wollen wir nun ρ zwar sehr gross aber zunächst immer noch endlich annehmen und den Grenzübergang $\rho \to \infty$ erst später durchführen. Die Gleichung (134) möge aber bereits jetzt schon nicht mehr berücksichtigt werden. Es lässt sich $\dot{y}(u)$ nach (133) in zwei Teile zerlegen:

$$\dot{y}(u) = \dot{y}_S(u) + \dot{y}_E(u); \quad 0 < u < \frac{\rho\pi}{\varkappa} \tag{136}$$

mit

$$\dot{y}_S(u) = \frac{\varkappa^3}{N_m} \sin\{\varkappa u + \varepsilon_m\}; \quad 0 < u < \frac{\rho\pi}{\varkappa} \tag{137}$$

und

$$\dot{y}_E(u) = e^{-\alpha_m u}\,(c_3 \sin\beta\, u + c_4 \cos\beta\, u)\,; \quad 0 < u < \frac{\rho\pi}{\varkappa} \tag{138}$$

Für grosse u wird $\dot{y}_E(u)$ wegen der Exponentialfunktion sehr klein. In (136) bestimmt daher $\dot{y}_E(u)$ den Einschwingvorgang. Dagegen ist $\dot{y}_S(u)$ eine Sinusschwingung mit konstanter Amplitude und bestimmt in (136) den stationären Vorgang.

Wenn wir nun den Bereich $u < \rho\pi/\varkappa$ betrachten, so berechnet sich die resultierende Ausgangsspannung $U_m(\tau)$ nach (68) mit $\dot{y}(u)$ von (136). Die in diesem u-Intervall, also nach Durchgang des gesamten wesentlichen Teiles des Wellenzuges (132) im Eingangskreis der Geophongruppe umgesetzte elektrische Energie ist entsprechend (96)

$$Q'_m = \frac{1}{\omega_0 R_m} \int\limits_{[u=0]}^{\left[u=\frac{\rho\pi}{\varkappa}\right]} U_m^2(\tau)\, d\tau = \frac{1}{\omega_0 R_m} \int\limits_{T}^{\frac{\rho\pi}{\varkappa}+T'} U_m^2(\tau)\, d\tau \tag{139}$$

weil nach (66) $\dot{y}(u)$ und daher nach (68) auch der Integrand für alle negativen u verschwindet. Im zweiten Integral von (139) wurden unter Berücksichtigung der Beziehungen (36) die Integrationsgrenzen für die Zeitvariable τ geschrieben; es bedeutet T nach (38) das Minimum der τ_ν und T' ihr Maximum. Wir wählen nun ρ so gross, dass es für Q'_m nach (139) nur einen vernachlässigbar kleinen Fehler bedeutet, wenn wir in (136) den Einschwingvorgang $\dot{y}_E(u)$ neben dem stationären Vorgang $\dot{y}_S(u)$ vernachlässigen. Die Spannung $U_m(\tau)$ in (139) ist dann nach (68), (72) und (136)

$$U_m(\tau) = R_m K \omega_0 C E_m \sum_{1}^{m}{}_{\nu}\, \dot{y}_S\{\tau - \tau_\nu\} \tag{140}$$

In der Summe von (140) beginnt der ν-te Summand $\dot{y}_S\{\tau\text{-}\tau_\nu\}$ zur Zeit $\tau = \tau_\nu$ mit Werten, die nach (137) von Null verschieden sind. Vorher verschwindet er wegen (66) identisch. Die Spannung $U_m(\tau)$ beginnt also zur Zeit $\tau = T$ mit Werten verschieden von Null. Aber erst vom Zeitpunkt $\tau = T' \geqslant T$ ab sind in (140) alle Summanden $\dot{y}_S\{\tau\text{-}\tau_\nu\}$ mit Werten nach (137) an der Summe beteiligt. Da es sich hierbei um eine Summe von Sinusfunktionen handelt, die alle dieselbe Frequenz haben, hat auch $U_m(\tau)$ für $\tau \geqslant T'$ einen sinusförmigen Verlauf. Um nun alle Schwierigkeiten auszuschalten, die mit dem Beginn der stationären Schwingung zusammenhängen, wollen wir die Definition der Funktionen $\dot{y}_S\{\tau\text{-}\tau_\nu\}$ nach (36), (66) und (137) ersetzen durch folgende Definition:

$$\left.\begin{aligned} \dot{y}_S\{\tau\text{-}\tau_\nu\} &= \frac{\varkappa^3}{N_m}\sin\{\varkappa(\tau\text{-}\tau_\nu)+\varepsilon_m\}; \quad 0<\tau<\frac{\rho\pi}{\varkappa} \\ \dot{y}_S\{\tau\text{-}\tau_\nu\} &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad ; \qquad \tau<0 \end{aligned}\right\}; \quad \nu=1,\ldots,m \tag{141}$$

Der Unterschied zur alten Definition besteht in einer Verschiebung der Definitionsintervalle für $\dot{y}_S\{\tau\text{-}\tau_\nu\}$ um $(\text{-}\tau_\nu)$. Wenn jetzt die Spannung $U_m(\tau)$ nach (140) mit (141) gebildet wird, so verschwindet sie bis zum Zeitpunkt $\tau = 0$ identisch und verläuft von dann ab genau sinusförmig. Die Periode ist dieselbe wie die der Erregung (132) nämlich $2\pi/\varkappa$. Da in (139) ρ und damit auch der Wert von Q'_m sehr gross sind, bewirkt die Abänderung der wahren Verhältnisse durch (141) nur einen vernachlässigbar kleinen Fehler für Q'_m. Durch diese Überlegung erst erfährt die Definition (141) ihre Rechtfertigung. Mit $U_m(\tau)$ nach (140) und (141) ist

$$Q'_m = \frac{1}{\omega_0 R_m}\int_0^{\frac{\rho\pi}{\varkappa}} U_m^2(\tau)\,d\tau; \quad \rho \gg 1 \tag{142}$$

5. 2) *Superpositionsmass bei stationärer Erregung*

Da der Integrand in (142) wie $U_m(\tau)$ die Periode $2\pi/\varkappa$ hat, können wir auch schreiben

$$Q'_m = \frac{\rho}{2}\,\overline{Q}_m \tag{143}$$

mit

$$\overline{Q}_m = \frac{1}{\omega_0 R_m}\int_0^{\frac{2\pi}{\varkappa}} U_m^2(\tau)\,d\tau \tag{144}$$

$\overline{Q}_m$ ist die in einer Periode der stationären resultierenden Ausgangsspannung im Eingangskreis umgesetzte elektrische Energie. Wenn wir jetzt im Grenzübergang $\rho \to \infty$ den Quotienten der Gesamtenergien nach (96) im Falle der Geophongruppe und im Falle des Einzelgeophons bilden, so ergibt sich mit (143)

$$\frac{Q_m}{Q_1} = \lim_{\rho\to\infty}\frac{Q'_m}{Q'_1} = \frac{\overline{Q}_m}{\overline{Q}_1} \tag{145}$$

Erst jetzt nach dem Grenzübergang $\rho \to \infty$ haben wir den Fall der stationären Erregung wirklich voll erfasst. Jetzt ist die Gleichung (134) tatsächlich völlig bedeutungslos geworden. Die Fehler, die durch die Vernachlässigung des Einschwingvorganges und durch die Definition (141) verursacht wurden, sind für die Beziehung (145) verschwunden und daher ohne jede Bedeutung geworden. Mathematisch haben wir jetzt die Möglichkeit, uns den Beginn der

Erregung beliebig weit in die Vergangenheit zurück verlegt zu denken, so dass zur Zeit der Betrachtung mit voller Gewissheit alle Einschwingvorgänge abgeklungen sind, und wir einen rein stationären Vorgang betrachten.

Es wurde schon im vorigen Abschnitt 5. 1 darauf hingewiesen, dass bei stationärer, sinusförmiger Erregung nach (132) mit $\rho \to \infty$ die Bedingung (31) nicht mehr erfüllt ist. Damit existiert auch nicht das uneigentliche Integral in (96). Die Gleichungen (144) und (145) besagen nun, dass in diesem stationären Falle, in dem Q_m und Q_1 nach (96) nicht mehr existieren, ihr Quotient sehr wohl existiert. Dies ist aber hinreichend für die Existenz des Superpositionsmasses h nach (98). Aus (98) und (145) folgt

$$h = \underset{+}{\sqrt{\frac{R_1 \overline{Q}_m}{R_m \overline{Q}_1}}} \tag{146}$$

Dieselben Überlegungen, die wir bisher für den Fall stationärer, sinusförmiger Erregung angestellt haben, lassen sich auch für jede andere stationäre, also periodische, nicht-sinusförmige Erregung durchführen. Es gilt immer (146), wo $\overline{Q}_m$ beziehungsweise $\overline{Q}_1$ die Energien bedeuten, die während einer Periode der stationär verlaufenden resultierenden Ausgangsspannung umgezetzt werden. Damit ist gezeigt, dass die Definition des Superpositionsmasses h in (98) auch für alle Fälle stationärer Erregung anwendbar ist, obwohl die Bedingung (31) dann nicht mehr erfüllt ist.

Für die sinusförmige Erregung wollen wir aus (146) noch einen anderen Ausdruck für das Superpositionsmass h herleiten. In (99) wurde $U_{am}(\tau)$ als die Spannung eingeführt, die von der m-fachen Geophongruppe höchstens nach aussen abgegeben werden kann. Wegen (97) wurde h in (98) in besonderem Hinblick auf diese Spannung $U_{am}(\tau)$ definiert. Aus (99), (144) und (146) folgt hier für das Superpositionsmass

$$h = \underset{+}{\sqrt{\int_0^{\frac{2\pi}{\varkappa}} U_{am}^2(\tau)\, d\tau}} \Bigg/ \underset{+}{\sqrt{\int_0^{\frac{2\pi}{\varkappa}} U_{a1}^2(\tau)\, d\tau}} \tag{147}$$

Diese Form für h entspricht der Gleichung (100) für impulsförmige Erregung. Wenn man bedenkt, dass

$$\overset{*}{U}_{am} = \underset{+}{\sqrt{\frac{\varkappa}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\varkappa}} U_{am}^2(\tau)\, d\tau}} \tag{148}$$

die Amplitude der sinusförmigen Spannung $U_{am}(\tau)$ ist, so ergibt sich aus (147) für h

$$h = \overset{*}{U}_{am} / \overset{*}{U}_{a1} \tag{149}$$

Das in (98) definierte Superpositionsmass h geht also im Falle stationärer, sinusförmiger Erregung über in die übliche Beschreibung einer Interferenzerscheinung an sinusförmig verlaufenden Vorgängen, nämlich in den Vergleich der Amplituden der interessierenden, sinusförmigen Spannung $U_a(\tau)$ vor und nach der Superposition durch ihren Quotienten. Hiermit ist gezeigt, dass das Superpositionsmass h, wie es in (98) besonders für impulsförmige Erregung definiert worden ist, eine echte und damit zulässige Verallgemeinerung dieser üblichen Interferenzbeschreibung bei harmonischen Schwingungen darstellt. Selbstverständlich gilt das hier nur im Hinblick auf die besonderen Verhältnisse bei der Geophongruppe. Hier muss vor allem an die Erläuterungen in Abschnitt 4. 2 zur Anwendung des Begriffes „Superposition" bei der Geophongruppe erinnert werden.

5. 3) *Superpositionsmass bei sinusförmiger Erregung und Reihenaufstellung*

Für eine symmetrisch geschaltete Geophongruppe in Reihenaufstellung wollen wir nun h nach (149) wirklich berechnen, also h als Funktion der Wellenrichtung ermitteln. Die Spannung $U_{am}(\tau)$ ergibt sich aus (99), (140) und (141) als

$$U_{am}(\tau) = R_a K \omega_0 C \varkappa^3 \frac{E_m}{N_m} \sum_1^m{}^{\nu} \sin \{\varkappa (\tau - \tau_\nu) + \varepsilon_m\} \tag{150}$$

Die Aufstellung der Geophone wird durch (27) und (42) beschrieben. Die fortlaufende Numerierung der Geophone möge so erfolgen, dass ihre positive Richtung mit der positiven Richtung der ξ-Achse zusammenfällt. Es folgt dann aus (34) und (42) schärfer als in (43) und (44)

$$\tau_{\nu+\mu} - \tau_\nu = \mu \tau_0'; \quad \tau_0' = \frac{\omega_0 e}{V} \cos \varphi; \quad \mu = 0, 1, \ldots, m\text{-}1; \nu = 1, \ldots, m\text{-}\mu \tag{151}$$

Wir können jetzt die Summe

$$\sum = \sum_1^m{}^{\nu} \sin \{\varkappa (\tau - \tau_\nu) + \varepsilon_m\} \tag{152}$$

aus (150) durch Anwendung der goniometrischen Formel

$$\sin \alpha = \frac{1}{2 \sin \beta} [\cos \{a - \beta\} - \cos \{a + \beta\}] \tag{153}$$

zweckmässig umformen. Wenn wir dabei $\beta = \frac{1}{2} \varkappa \tau_0'$ setzen, ergibt sich

$$\sum = \frac{1}{2\sin\frac{\varkappa}{2}\tau_0'}\sum_1^m{}_\nu \left[\cos\{\varkappa(\tau-\tau_\nu)+\varepsilon_m-\frac{\varkappa}{2}\tau_0'\}-\cos\{\varkappa(\tau-\tau_\nu)+\varepsilon_m+\frac{\varkappa}{2}\tau_0'\}\right] \quad (154)$$

Man sieht, dass sich in dieser Gleichung wegen der Beziehung (151) für $\mu = 1$ alle Summanden bis auf zwei gegenseitig aufheben. Es bleibt

$$\sum = \frac{1}{2\sin\frac{\varkappa}{2}\tau_0'}\left[\cos\{\varkappa(\tau-\tau_\nu)+\varepsilon_m-\frac{\varkappa}{2}\tau_0'\}-\cos\{\varkappa(\tau-\tau_\nu)+\varepsilon_m+\frac{\varkappa}{2}\tau_0'\}\right] \quad (155)$$

Durch Umformung in ein Produkt folgt unter Berücksichtigung von (151)

$$\sum = \frac{\sin\frac{m}{2}\varkappa\tau_0'}{\sin\frac{1}{2}\varkappa\tau_0'}\sin\left\{\varkappa(\tau-\frac{\tau_1+\tau_m}{2})+\varepsilon_m\right\} \quad (156)$$

Der Wert dieses Ausdrucks ändert sich nicht, wenn man τ_0' durch seinen Betrag $|\tau_0'| = \tau_0$ nach (44) ersetzt. Damit ergibt sich jetzt über (152) aus (150)

$$U_{am}(\tau) = R_a K\omega_0 C\varkappa^3 \frac{E_m}{N_m}\frac{\sin\frac{m}{2}\varkappa\tau_0}{\sin\frac{1}{2}\varkappa\tau_0}\sin\left\{\varkappa(\tau-\frac{\tau_1+\tau_m}{2})+\varepsilon_m\right\} \quad (157)$$

Diese Gleichung beschreibt klar den sinusförmigen Verlauf der Spannung $U_{am}(\tau)$. Die Amplitude ist

$$\overset{*}{U}_{am} = R_a K\omega_0 C\varkappa^3 \frac{E_m}{N_m}\left|\frac{\sin\frac{m}{2}\varkappa\tau_0}{\sin\frac{1}{2}\varkappa\tau_0}\right| \quad (158)$$

Das gilt auch für $m = 1$, also beim Einzelgeophon. Für das Superpositionsmass folgt jetzt aus (149) und (158)

$$h(\tau_0) = \frac{E_m N_1}{E_1 N_m}\left|\frac{\sin\frac{m}{2}\varkappa\tau_0}{\sin\frac{1}{2}\varkappa\tau_0}\right| = h(\varphi) \quad (159)$$

Bei dieser Bildung von h kürzen sich der richtungsabhängige Faktor C und eine eventuell von eins verschiedene Amplitude der Wellenfunktion (132) wie beim Impulsfalle im Abschnitt 4. 3 heraus. h ist also wie in (122) nur über τ_0 richtungsabhängig, und zwar nach (44) nur von der einen Koordinate φ.

Es gilt wieder die Symmetrie (123). Obwohl nach (132) $\dot{f}(+0) \neq 0$ ist, hat $h(\varphi)$ hier — anders als im Impulsfalle — an der Stelle $\varphi = \pi/2$ keine Ecke. Nach (159) hat $h(\tau_0)$ für $\tau_0 = 0$ den Wert

$$h_0 = m \frac{E_m N_1}{E_1 N_m} \tag{160}$$

Damit kann man (159) auch so schreiben:

$$h(\tau_0) = \frac{h_0}{m} \left| \frac{\sin \frac{m}{2} \varkappa \tau_0}{\sin \frac{1}{2} \varkappa \tau_0} \right| \tag{161}$$

Die Richtungsabhängigkeit des Superpositionseffektes im Falle stationärer, sinusförmiger Erregung wird wesentlich bestimmt durch die in (158), (159) und (161) auftretende Funktion von τ_0

$$\left| \frac{\sin \frac{m}{2} \varkappa \tau_0}{\sin \frac{1}{2} \varkappa \tau_0} \right|$$

Diese Funktion wurde in den bereits erwähnten Arbeiten von HALES und EDWARDS (1955), PARR und MAYNE (1955), LOMBARDI (1955) und REYNOLDS (1954) diskutiert beziehungsweise für einzelne m graphisch dargestellt. Die Minima des Superpositionsmasses h nach (161) sind

$$h(\tau_0) = 0; \quad \tau_0 = n \frac{2\pi}{m\varkappa}; \quad n \text{ ganzz.}, \not\equiv m \bmod 0 \tag{162}$$

Sie werden in einer Ecke erreicht. Die Hauptmaxima sind

$$h(\tau_0) = h_0; \quad \tau_0 = n \frac{2\pi}{\varkappa}; \quad n \text{ ganzz.} \tag{163}$$

Die Nebenmaxima liegen in den übrigen Intervallen zwischen je zwei benachbarten Minima. Sie sind alle kleiner als die Hauptmaxima. Nach (162) kann also h sehr kleine Werte annehmen und es verschwindet sogar für einzelne Richtungen. Das bedeutet nach (98) beziehungsweise (146), dass die m-fache Geophongruppe ($m \neq 1$) keine resultierende Ausgangsspannung erzeugt und keine Energie in den Eingangskreis einbringt, wenn sie durch stationäre Sinuswellen aus diesen bestimmten Richtungen erregt wird. An Stelle einer Verbesserung der Registrierbarkeit bewirkt der Superpositionseffekt für diese Richtungen also praktisch sogar eine Auslöschung der Nutzwellen.

Diese besonders einschneidenden Verhältnisse liegen immer dann vor, wenn die Funktion $h(\tau_0)$ Nullstellen hat. Bei der Durchrechnung von Beispielen für

den Fall impulsförmiger Erregung nach den Formeln des 4.Abschnitts gewinnt man die Erfahrung, dass h in diesen Fällen in der Regel keine Nullstellen besitzt. Das ist ein wesentlicher Unterschied zwischen den Verhältnissen bei stationär sinusförmiger und denen bei impulsförmiger Erregung. Es ist also unzureichend, bei einer oszillierenden Impulsfunktion den physikalisch reellen und die Praxis allein interessierenden Impulsfall durch das Modell einer stationären, sinusförmigen Erregung zu beschreiben, wie es bisher gemacht wurde. Weiterhin lässt sich im gleichen Sinne noch folgendes sagen: In der angewandten Seismik interessiert bei der Registrierung einer „Reflexion" vor allem ihr erster Teil, der „Einsatz". Man darf hier sicher nicht von den Einschwing- und Anfangsvorgängen absehen. Der in den Abschnitten 5. 1 und 5. 2 vollzogene Übergang vom Impulsfall zum stationären Fall bestand aber gerade in der Vernachlässigung dieser Vorgänge. Die weiter oben vor (162) erwähnten Autoren sind in ihren Arbeiten nicht über den Fall der stationären, sinusförmigen Erregung einer Geophongruppe in Reihenaufstellung hinausgegangen.

Wir wollen nun den Maximalwert des Superpositionsmasses h_0 nach (160) in einem numerischen Beispiel näher untersuchen, und zwar für die beiden Fälle der serien- beziehungsweise parallelgeschalteten Geophongruppe. Die Daten der verwendeten Geophone mögen wieder durch (93) gegeben sein. Der Wert von ω_0 in (93) bedeutet, dass die Geophone eine Resonanzfrequenz von 24 Hz haben. Wenn wir also in (132)

$$\varkappa = 2 \tag{164}$$

wählen, so nehmen wir an, dass die Frequenz der erregenden Sinuswellen 48 Hz beträgt.

Für die Serienschaltung folgt aus (160) mit (79), (81) und (210)

$$h_0 = \frac{m\,(R_i + R_a)}{R_a + m\,R_i} \sqrt[+]{\frac{(1-\varkappa^2)^2 + 4\alpha_1^2\varkappa^2}{(1-\varkappa^2)^2 + 4\alpha_m^2\varkappa^2}} \tag{165}$$

Darin sind α_1 und α_m nach (82) zu bilden und sind noch Funktionen des Aussenwiderstandes R_a. Entsprechend folgt für die Parallelschaltung aus (160) mit (84), (89) und (210)

$$h_0 = \frac{m\,(R_i + R_a)}{R_i + m R_a} \sqrt[+]{\frac{(1-\varkappa^2)^2 + 4\alpha_1^2\varkappa^2}{(1-\varkappa^2)^2 + 4\alpha_m^2\varkappa^2}} \tag{166}$$

mit α_1 und α_m nach (90). In Abb. 5 ist h_0 mit den Daten nach (93) und (164) berechnet und als Funktion des Aussenwiderstandes graphisch dargestellt. Als Mass für den Aussenwiderstand ist wie in Abb. 4 wieder σ nach (92) benutzt worden. Die ausgezogenen Kurven sind nach (166) und (90) berechnet worden

und gelten für die Parallelschaltung. Die gestrichelten Kurven gelten nach (165) und (82) für die Serienschaltung.

In Abb. 5 wird deutlich, dass der Maximalwert des Superpositionsmasses meistens wesentlich kleiner ist als m. Nur in den Grenzfällen $\sigma \to 0$ bei der Parallelschaltung und $\sigma \to \infty$ bei der Serienschaltung wird $h_0 = m$. Das bedeutet nach (149), dass selbst bei günstigster Superpositionwirkung die Amplitude

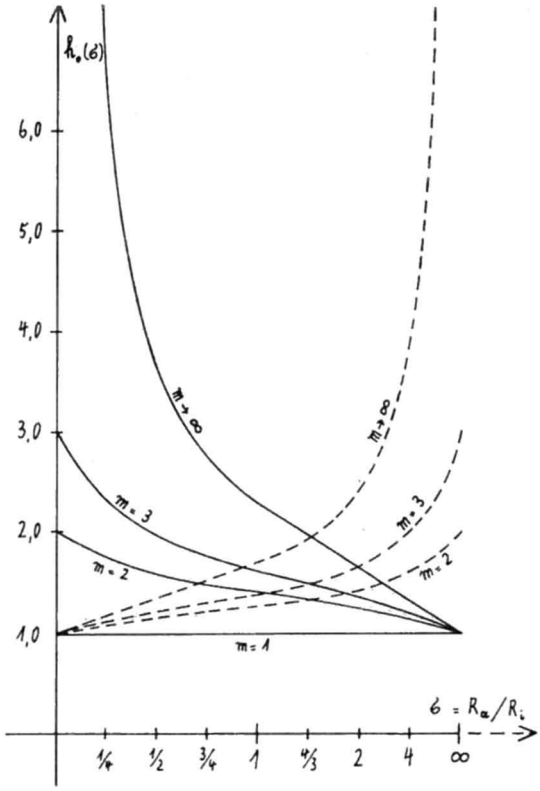

Abb. 5. Maximalwert h_0 des Superpositionsmasses als Funktion von R_a für Geophone mit Daten nach (93); ····· Serienschaltung, —— Parallelschaltung.
Maximum value h_0 of the superposition measure as function of R_a for geophones having properties as in eq. (93); ····· series connection, —— parallel connection.

der registrierbaren Spannung $\overset{*}{U}_{am}$ bei der Geophongruppe meistens wesentlich kleiner ist als das m-fache der Spannungsamplitude $\overset{*}{U}_{a1}$ im Falle des Einzelgeophons. Hiermit haben wir eine weitere Erläuterung zu den Ausführungen im Abschnitt 4.2 gewonnen, dass nämlich die Superpositionswirkung der Geophongruppe nicht als eine reine, algebraische Additionswirkung verstanden werden darf.

6. Abschnitt: Ein Beispiel für den Superpositionseffekt bei Impulserregung

6. 1) *Superpositionsmass bei Erregung durch gedämpften Sinusimpuls*

In diesem Abschnitt wollen wir ein praktisches Beispiel für die Anwendung der bisher entwickelten Begriffe und Methoden behandeln. Eine symmetrisch geschaltete Geophongruppe in Reihenaufstellung möge durch eine gedämpfte Sinusschwingung nach (221) erregt werden. Es wird keine von eins verschiedene Quasiamplitude angenommen, da sie ja ohnehin für das Superpositionsmass h keine Bedeutung hätte. Die Berechnung von h erfolgt mit $\dot{y}(u)$ aus (223) nach (122) mit (104), (120) und (121).

Wenn wir in (223) folgende Abkürzungen einführen

$$\left.\begin{aligned} e^{-\lambda u}\sin \varkappa u &= S_1(u) = S_1\,; \quad e^{-\lambda u}\cos \varkappa u = C_1(u) = C_1 \\ e^{-\alpha u}\sin \beta u &= S_2(u) = S_2\,; \quad e^{-\alpha u}\cos \beta u = C_2(u) = C_2 \end{aligned}\right\} \tag{167}$$

so folgt:

$$\dot{y}(u) = c_1 S_1 + c_2 C_1 + c_3 S_2 + c_4 C_2 \tag{168}$$

Zur Berechnung der P_μ nach (120) braucht man weiter:

$$\begin{aligned} \dot{y}\{u + \mu\tau_0\} = c_1\, S_1\{u + \mu\tau_0\} + c_2\, C_1\{u + \mu\tau_0\} + c_3\, S_2\{u + \mu\tau_0\} + \\ + c_4 C_2\{u + \mu\tau_0\} \end{aligned} \tag{169}$$

Man überzeugt sich leicht, dass für die in (167) definierten Funktionen $S(u)$ und $C(u)$ die folgenden Additionstheoreme gelten

$$\left.\begin{aligned} S\{u_1 + u_2\} &= S(u_1)\, C(u_2) + C(u_1)\, S(u_2) \\ C\{u_1 + u_2\} &= C(u_1)\, C(u_2) - S(u_1)\, S(u_2) \end{aligned}\right\} \tag{170}$$

Wenn man (169) mit (170) umformt, so ergibt sich mit den Abkürzungen nach (167)

$$\left.\begin{aligned} \dot{y}\{u + \mu\tau_0\} = (c_1C_1 - c_2S_1)S_1(\mu\tau_0) + (c_1S_1 + c_2C_1)\, C_1(\mu\tau_0) + \\ + (c_3C_2 - c_4S_2)\; S_2(\mu\tau_0) + (c_3S_2 + c_4C_2)C_2(\mu\tau_0) \end{aligned}\right\} \tag{171}$$

Um nun P_μ nach (120) zu erhalten, müssen wir (168) mit (171) multiplizieren und über u von 0 bis ∞ integrieren. Es ergibt sich

$$P_\mu = A_1\, S_1(\mu\tau_0) + A_2\, C_1(\mu\tau_0) + A_3\, S_2(\mu\tau_0) + A_4\, C_2(\mu\tau_0) \tag{172}$$

wo die A folgende von τ_0 unabhängige Ausdrücke bedeuten:

$$\left.\begin{aligned}
A_1 &= (c_1^2 - c_2^2)\,\overline{S_1C_1} + c_1c_2\,(\overline{C_1^2} - \overline{S_1^2}) + c_1c_3\overline{S_2C_1} + c_1c_4\overline{C_1C_2} - \\
&\qquad - c_2c_3\overline{S_1S_2} - c_2c_4\overline{S_1C_2} \\
A_2 &= 2c_1c_2\overline{S_1C_1} + c_1^2\overline{S_1^2} + c_2^2\overline{C_1^2} + c_1c_3\overline{S_1S_2} + c_1c_4\overline{S_1C_2} + \\
&\qquad + c_2c_3\overline{S_2C_1} + c_2c_4\overline{C_1C_2} \\
A_3 &= (c_3^2 - c_4^2)\,\overline{S_2C_2} + c_3c_4\,(\overline{C_2^2} - \overline{S_2^2}) + c_1c_3\overline{S_1C_2} - c_1c_4\overline{S_1S_2} + \\
&\qquad + c_2c_3\overline{C_1C_2} - c_2c_4\overline{S_2C_1} \\
A_4 &= 2c_3c_4\overline{S_2C_2} + c_3^2\overline{S_2^2} + c_4^2\overline{C_2^2} + c_1c_3\overline{S_1S_2} + c_1c_4\overline{S_1C_2} + \\
&\qquad + c_2c_3\overline{S_2C_1} + c_2c_4\overline{C_1C_2}
\end{aligned}\right\} \tag{173}$$

Die eckigen Klammern in (173) bedeuten, dass die darunter stehenden Ausdrücke, die nach (167) Funktionen von u sind, über u von 0 bis ∞ integriert werden müssen. Ausgerechnet ergeben diese Integrale [1])

$$\left.\begin{aligned}
\overline{S_1^2} &= \frac{\varkappa^2}{4\lambda\,(\lambda^2+\varkappa^2)}\,; \quad \overline{S_2^2} = \frac{1-\alpha^2}{4\alpha} \\
\overline{C_1^2} &= \frac{2\lambda^2+\varkappa^2}{4\lambda(\lambda^2+\varkappa^2)}\,; \quad \overline{C_2^2} = \frac{1+\alpha^2}{4\alpha} \\
\overline{S_1C_1} &= \frac{\varkappa}{4\,(\lambda^2+\varkappa^2)}\,; \overline{S_2C_2} = \frac{\beta}{4} \\
\overline{S_1C_2} &= \frac{\beta\,[2\alpha\,(\alpha+\lambda)+\lambda^2+\varkappa^2-1]}{[(\lambda+\alpha)^2+\varkappa^2+\beta]^2-4\varkappa^2\beta^2}; \overline{S_1S_2} = \frac{2\beta\varkappa\,(\alpha+\lambda)}{[(\lambda+\alpha)^2+\varkappa^2+\beta]^2-4\varkappa^2\beta^2} \\
\overline{C_1C_2} &= \frac{(\alpha+\lambda)\,[2\alpha\lambda+\lambda^2+\varkappa^2+1]}{[(\lambda+\alpha)^2+\varkappa^2+\beta]^2-4\varkappa^2\beta^2}; \overline{S_2C_1} = \frac{\beta\,(2\alpha\lambda+\lambda^2-\varkappa^2+1)}{[(\lambda+\alpha)^2+\varkappa^2+\beta]^2-4\varkappa^2\beta^2}
\end{aligned}\right\} \tag{174}$$

Hierin ist β durch (201) gegeben.

Aus (167) und (172) folgt für $\mu = 0$:

$$P_0 = A_2 + A_4 \tag{175}$$

Damit ist nach (104) und (120)

$$F_1 = \frac{1}{R_1^2}\,(A_{2(1)} + A_{4(1)}) \tag{176}$$

Der eingeklammerte Index eins bei $A_{2(1)}$ und $A_{4(1)}$ bedeutet, dass bei ihrer Berechnung nach (173) mit den Formeln (224) und (174) das Dämpfungsmass α_1 nach (77) verwendet werden muss. In allen anderen Fällen sind die A_ν nach (173), (174) und (224) mit den Dämpfungsmass α_m zu berechnen.

[1]) Die Integrale wurde nach den Formeln II 335, 6a, 6b, 6c in der Integraltafel von GRÖBNER und HOFREITER (1949) berechnet.

Die Berechnung des Superpositionsmasses h erfolgt jetzt nach (121) und (122) mit (172) und (176). Wenn wir

$$P_\mu = \frac{F_1}{2\,E_m^2}\, p\,(\mu\tau_0) \tag{177}$$

setzen, können wir dieses Verfahren bei Berücksichtigung von (175) durch leichte Umformungen auf folgende, für die numerische Rechnung zweckmässige Form bringen

$$h(\tau_0) = \underset{+}{\sqrt{a_0 + \sum_{1}^{m-1}{}_{\mu}\,(m\text{-}\mu)\,p(\mu\tau_0)}} \tag{178}$$

wo $p(v)$ als Funktion des Argumentes v gegeben ist durch

$$p(v) = a_1\, e^{-\lambda v} \;\sin\{\varkappa v + \gamma_1\} + a_2\, e^{-\alpha_m v} \;\sin\{\beta_m v + \gamma_2\} \tag{179}$$

Die Konstanten a_0, a_1, a_2 in (178) und (179) sind

$$a_0 = \frac{mE_m^2}{F_1}(A_2 + A_4)\,; \quad a_1 = \frac{2E_m^2}{F_1}\underset{+}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}}\,; \quad a_2 = \frac{2E_m^2}{F_1}\underset{+}{\sqrt{A_3^2 + A_4^2}} \tag{180}$$

Für die Winkel γ_1 und γ_2 in (179) gelten die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \sin\gamma_1 &= \frac{A_2}{\underset{+}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}}}\,; \quad \cos\gamma_1 = \frac{A_1}{\underset{+}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}}} \\ \sin\gamma_2 &= \frac{A_4}{\underset{+}{\sqrt{A_3^2 + A_4^2}}}\,; \quad \cos\gamma_2 = \frac{A_3}{\underset{+}{\sqrt{A_3^2 + A_4^2}}} \end{aligned}\right\} \tag{181}$$

Aus (126), (175) und (180) ergibt sich für den Maximalwert des Superpositionsmasses

$$h_0 = \underset{+}{\sqrt{ma_0}} \tag{182}$$

6. 2) *Numerisches Beispiel*

Für die Berechnung eines Beispiels wollen wir in (221) annehmen

$$\varkappa = 2; \quad \lambda = 0{,}2 \tag{183}$$

Wenn die verwendeten Geophone wiederum vom Typ (93) sind, bedeutet (183) nach den Ausführungen im Zusammenhang mit (164), dass das Amplitudenspektrum des gedämpften Sinusimpulses sein Maximum bei 48 Hz hat. In Abb. 6 ist die gewählte Impulsfunktion nach (221) und (183) aufgezeichnet. Auf Grund der Wahl von λ ist der Wert des fünften Maximums schon kleiner als der zehnte Teil des ersten.

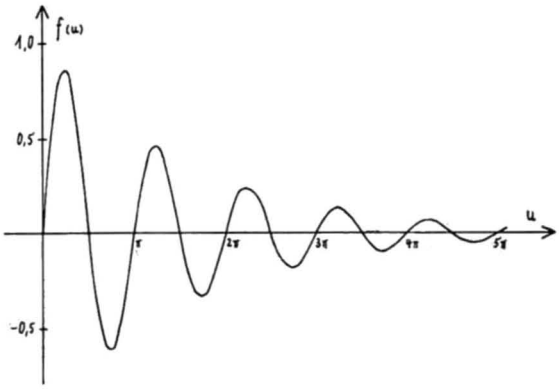

Abb. 6. Gedämpfte Sinusschwingung $f(u) = e^{-\lambda u} \sin \varkappa u$; $u \geqslant o$ mit $\lambda = 0{,}2$; $\varkappa = 2$.
Damped harmonic vibration $f(u) = e^{-\lambda u} \sin \varkappa u$; $u \geqslant o$ with $\lambda = 0.2$; $\varkappa = 2$.

Die Geophongruppe unseres Beispiels möge aus 3 Geophonen vom Typ (93) bestehen und in Reihe aufgestellt und parallel geschaltet sein. Solche Geophongruppen werden in Deutschland in der Praxis sehr häufig verwendet. Eine bekannte seismische Standardapparatur aus der Praxis hat pro Spur einen reellen Eingangswiderstand um 200 Ohm. Die zugehörigen Kabel haben einen Widerstand von 0,5 Ohm pro Meter Doppelleitung. Wenn wir also eine Kabelauslage von ungefähr 150 Meter von der seismischen Apparatur bis zur Geophongruppe annehmen, so entspricht das einem Aussenwiderstand R_a von etwa

$$R_a = 280\,[VA^{-1}]\,; \quad \sigma = 4/3 \tag{184}$$

mit σ nach (92) und (93). Mit den Daten nach (93) und (184) ergibt sich aus den Formeln (74), (77), (84), (90) und (201)

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha_1 = 0{,}4643; & \alpha_3 = 0{,}3500 \\ \beta_1 = 0{,}8857; & \beta_3 = 0{,}9368 \\ R_1 = 490 \quad ; & R_3 = 350 \end{array}\right\} \tag{185}$$

Mit (183) und (185) folgt nach (173), (174) und (224) für die A_ν

$$\left.\begin{array}{ll} A_1 = -0{,}1962; & A_3 = -0{,}2231 \\ A_2 = +7{,}260 \ ; & A_4 = -0{,}1521 \\ A_{2(1)} = +6{,}422 \ ; & A_{4(1)} = -0{,}1836 \end{array}\right\} \tag{186}$$

Mit diesen Werten berechnen wir aus (180) mit Berücksichtigung von (89), (176) und (185) für $m = 3$:

$$a_0 = 0{,}7443; \quad a_1 = 0{,}5070; \quad a_2 = 0{,}01886 \tag{187}$$

Aus (181) und (186) ergeben sich die Winkel γ_1 und γ_2 im Bogenmass zu:

$$\gamma_1 = 1{,}598; \quad \gamma_2 = 3{,}740 \tag{188}$$

Wenn $m = 3$ ist, wird aus (178)

$$h(\tau_0) = \sqrt[+]{a_0 + 2\,p\,(\tau_0) + p(2\tau_0)} \tag{189}$$

Für unser Beispiel ist jetzt das Superpositionsmass $h(\tau_0)$ durch (189) und (179) mit den Daten nach (183), (185), (187) und (188) gegeben. Dieses Ergebnis ist in Abb. 7 durch die ausgezogene Kurve graphisch dargestellt. Die nähere Diskussion der Kurve wird erst im nächsten Abschnitt 6.3 vorgenommen.

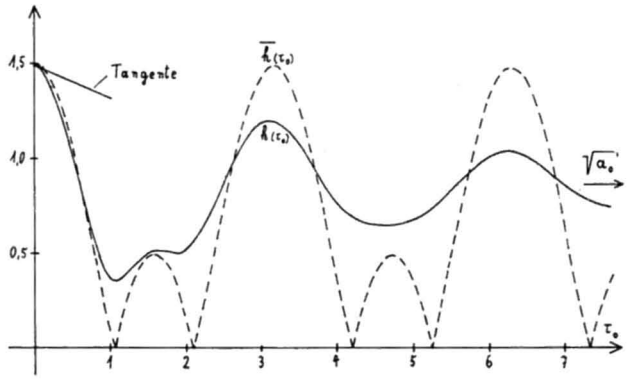

Abb. 7. Superpositionsmass für drei in Reihe aufgestellte, parallel geschaltete Geophone; $h(\tau_0)$ bei Erregung durch gedämpften Sinusimpuls; $\bar{h}(\tau_0)$ bei Erregung durch stationäre Sinuswellen

Superposition measure of linear array of three geophones connected in parallel; $h(\tau_0)$ for a damped sine impuls; $\bar{h}(\tau_0)$ for stationary harmonic waves.

Wir wollen jetzt das Superpositionsmass für den Fall berechnen, dass die Geophongruppe unseres Beispiels durch stationäre Sinuswellen der Frequenz 48 *Hz* erregt wird. Wir können dann in unserem konkreten Falle die Ergebnisse bei strenger, impulsgemässer Behandlung mit denen bei Annahme stationärer Erregung vergleichen. Das Superpositionsmass für den stationären Fall möge durch einen Querstrich gekennzeichnet werden. Es folgt dann für $m = 3$ und $\varkappa = 2$ aus (161) nach leichten goniometrischen Umformungen:

$$\bar{h}(\tau_0) = \frac{1}{3}\bar{h}_0 \mid 1 + 2\cos 2\tau_0 \mid \tag{190}$$

$\bar{h}_0$ berechnet sich aus (166), (184) und (185) zu

$$\bar{h}_0 = 1{,}492 \tag{191}$$

In Abb. 7 ist $\bar{h}(\tau_0)$ nach (190) und (191) durch die gestrichelte Kurve dargestellt.

6. 3) *Diskussion der Ergebnisse*

Die Diskussion der Kurve $\bar{h}(\tau_0)$ in Abb. 7 ist schon weitgehend durch die Ausführungen im Abschnitt 5.3 erledigt. Für die Minima und Hauptmaxima gelten (162) und (163) mit $m = 3$ und $\varkappa = 2$. Die Nebenmaxima haben den Wert $\bar{h}_0/3$ und liegen genau in der Mitte zwischen zwei aufeinander folgenden Hauptmaxima. An der Stelle $\tau_0 = 0$ verschwindet die Ableitung von $\bar{h}(\tau_0)$.

Das absolute Maximum der Funktion $h(\tau_0)$ an der Stelle $\tau_0 = 0$ ist nach (182) und (187)

$$h_0 = 1{,}494 \tag{192}$$

Der Unterschied zu $\bar{h}_0$ nach (191) ist zwar sehr klein aber numerisch gesichert. Die Ableitung von $h(\tau_0)$ an der Stelle $\tau_0 = 0$ berechnet sich nach (131) zu

$$\left[\frac{d\,h(\tau_0)}{d\tau_0}\right]_{\tau_0=0} = -0{,}1869 \tag{193}$$

Sie ist also von Null verschieden. In Abb. 7 ist die Tangente an $h(\tau_0)$ für die Stelle $\tau_0 = 0$ eingezeichnet. Von $\tau_0 = 0$ bis $\tau_0 = 0{,}75$ folgt $h(\tau_0)$ fast genau dem Verlauf von $\bar{h}(\tau_0)$. Von da ab weichen beide Kurven jedoch wesentlich voneinander ab.

Um den Verlauf von $h(\tau_0)$ besser zu verstehen, wollen wir aus (189) einen Näherungsausdruck für h ableiten. In (187) ist a_1 fast 27 mal grösser als a_2. Man kann also in (179) das zweite Glied mit a_2 als Faktor neben dem ersten Glied vernachlässigen. Wenn wir weiter $\gamma_1 = \pi/2$ setzen, so machen wir nach (188) einen Fehler in Winkelmass von nur etwa 1,5 Grad. Mit diesen Vernachlässigungen folgt jetzt aus (179) und (189) mit den Werten nach (183)

$$h^2(\tau_0) \approx a_0 + 2a_1 e^{-0{,}2\tau_0} \cos 2\tau_0 + a_1 e^{-0{,}4\tau_0} \cos 4\tau_0 \tag{194}$$

In bezug auf die Extrema verhalten sich die Funktionen $h(\tau_0)$ und $h^2(\tau_0)$ ähnlich. Wenn es nur um einen Überblick geht, können wir also h^2 nach (194) anstatt h betrachten. In (194) kann man wegen des Faktors 2 beim zweiten Glied und der doppelten Dämpfung beim dritten Glied in erster Näherung das dritte neben dem zweiten Glied vernachlässigen. Die Form der Kurve wird dann wesentlich bestimmt durch die gedämpfte Schwingung des zweiten Gliedes. Die Maxima liegen ungefähr an den Stellen, wo $\bar{h}(\tau_0)$ Hauptmaxima hat, die Minima dort, wo $\bar{h}$ Nebenmaxima hat. Die Schwingungen der Kurve werden mit grösser werdendem τ_0 immer mehr abgedämpft. Aus (179) und

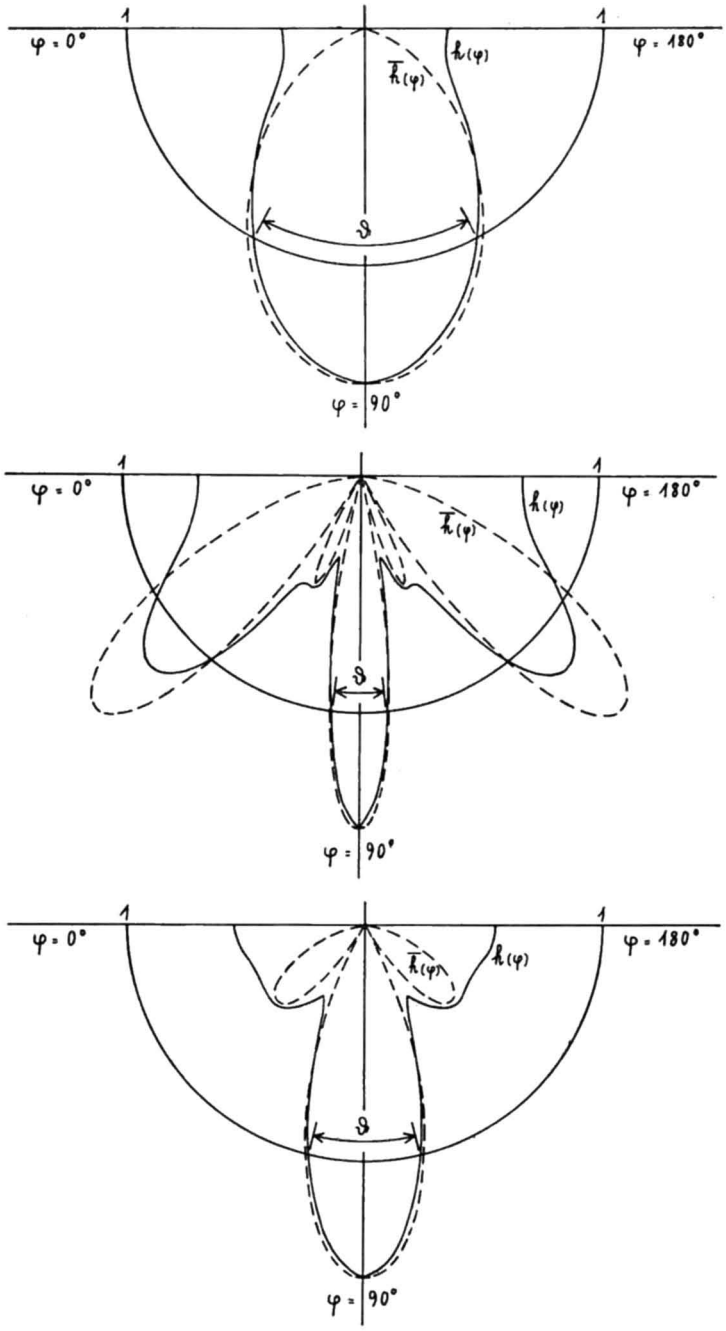

Abb. 8. Richtungsabhängigkeit des Superpositionsmasses für drei in Reihe aufgestellte, parallel geschaltete Geophone. Abstand zwischen den Geophonen $e = 6{,}94$ m (Abb. 8*a*), $e = 13{,}89$ m (Abb. 8*b*) und $e = 27{,}78$ m (Abb. 8*c*). ——— $h(\varphi)$ bei Erregung durch gedämpften Sinusimpuls; ..... $\bar{h}(\varphi)$ bei Erregung durch stationäre Sinuswellen.

Influence of the direction on the superposition measure of linear array of three geophones connected in parallel. Distance between geophones $e \doteq 6.94$ m (Fig. 8*a*), $e = 13.89$ m (Fig. 8*b*) and $e = 27.78$ m (Fig. 8*c*). ——— $h(\varphi)$ for a damped sine impuls; ..... $\bar{h}(\varphi)$ for stationary harmonic waves.

(189) folgt, dass für $\tau_0 \to \infty$ schliesslich $h(\tau_0) \to \sqrt{a_0}$ geht, was in Abb. 7 rechts durch einen Pfeil angedeutet ist. Das dritte Glied in (194) ist kleiner und klingt wesentlich schneller ab als das zweite. Es hat die doppelte Schwingungsfrequenz. Dadurch werden die Extrema des zweiten Gliedes angehoben. Die Maxima werden schärfer und die Minima stumpfer. An der Stelle $\tau_0 = 1{,}65$ kommt es sogar zur Ausbildung eines kleinen relativen Maximums.

Allgemein scheint der Verlauf von $h(\tau_0)$ einmal durch die Tendenz bestimmt, die Extrema von $\bar{h}(\tau_0)$ abzuschneiden. $h(\tau_0)$ hat keine Nullstellen mehr. Es gibt also nach den Ausführungen im Abschnitt 5. 3 im Gegensatz zum stationären Fall keine Richtung, für die die Empfindlichkeit der Geophongruppe verschwindet. Andererseits jedoch scheint $h(\tau_0)$ die Tendenz zu haben, in grossen Zügen dem Verlauf von $\bar{h}(\tau_0)$ zu folgen. Das ist verständlich wegen der engen Verwandtschaft der sinusförmigen Erregung mit derjenigen durch einen gedämpften Sinusimpuls gleicher Schwingungsfrequenz nach Abb. 6.

Mit Hilfe von (44) kann man $h(\tau_0)$ nach (189) und $\bar{h}(\tau_0)$ nach (190) als Funktionen $h(\varphi)$ beziehungsweise $\bar{h}(\varphi)$ von φ darstellen. In (44) ist ω_0 gegeben durch (93). Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit V der Wellen in der Nähe der Geophongruppe nehmen wir an als

$$V = 1000\,[ms^{-1}] \tag{195}$$

Wenn nun noch der Abstand e der Geophone in Abb. 2 gegeben ist, lassen sich die zugehörigen Funktionen $h(\varphi)$ und $\bar{h}(\varphi)$ berechnen. In den Abbildungen 8a, 8b und 8c sind die erhaltenen Kurven für die Abstände $e = 6{,}94$; $13{,}89$; $27{,}78$ Meter in einem Polarkoordinatensystem graphisch dargestellt. Nach den Festlegungen in Abb. 1 und Abschnitt 2.3 hat φ das Intervall $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Wegen (44) ist das entsprechende τ_0-Intervall $0 \leqslant \tau_0 \leqslant \frac{\omega_0}{V} e$. Man braucht also für die Ermittlung von $h(\varphi)$ und $\bar{h}(\varphi)$ die Funktionen $h(\tau_0)$ beziehungsweise $\bar{h}(\tau_0)$ in Abb. 7 nur in diesem Intervall zu kennen. Die Abstände e bei den Abbildungen 8a, 8b und 8c wurden so gewählt, dass $\bar{h}(\varphi)$ für $\varphi = 0$ eine Nullstelle hat.

In den drei Abbildungen ist auch der Halbkreis mit dem Radius eins eingezeichnet. Überall dort, wo die Kurven in Schleifen über diesen Halbkreis hinauslaufen, ist das Superpositionsmass grösser als eins. Der Superpositionseffekt ist dann für die Registrierung von Nutzwellen aus den entsprechenden Richtungen günstig. Wenn man das Superpositionsmass als ein Mass für die relative Registrierempfindlichkeit auffasst, so kann man auch sagen, dass die Geophongruppe für diese Richtungen empfindlicher ist als ein Einzelgeophon. Für die Kurventeile, die innerhalb des Halbkreises verlaufen, gilt entsprechend das Umgekehrte. Den Bogen, in Winkelmass gemessen, den die über den Einheitskreis hinausreichenden Schleifen von $h(\varphi)$ auf dem Einheitskreis

ausschneiden, wollen wir als die Breite dieser Schleifen definieren. In den drei Abbildungen sind es vor allem die in die Richtung $\varphi = 90°$ weisenden Hauptschleifen. Ihre Breite ist in den Abbildungen ϑ genannt. In der Abb. 8c sind aber noch zwei Nebenschleifen in den Richtungen $\varphi = 41°$; $139°$ mit den Breiten von je $20°$ vorhanden.

In der ausgezogenen Kurve der Abb. 9 ist für unser Beispiel die Breite ϑ der Hauptschleife als Funktion des Abstandes e der Geophone aufgetragen. Man sieht: Für kleinere e ist die Geophongruppe über grosse Winkelbereiche empfindlicher als ein Einzelgeophon; für $e < 3$ m sogar für alle φ. Für grössere Abstände e jedoch wird die Hauptschleife sehr schmal. Die relative Empfindlichkeit der Geophongruppe fällt dann von $\varphi = 90°$ aus zu kleineren und grösseren φ hin sehr schnell ab. Bei grösseren e treten aber auch wie in Abb. 8c die beiden Nebenmaxima auf. Sie scheinen die deutliche Bevorzugung der Richtung $\varphi = 90°$ durch die schmale Hauptschleife wesentlich zu stören. Hierzu muss man bedenken, dass $h(\varphi)$ in Abb. 8c ein Mass für die relative Empfindlichkeit der Geophongruppe darstellt und noch nicht ihre absolute, also wirkliche Empfindlichkeit repräsentiert.

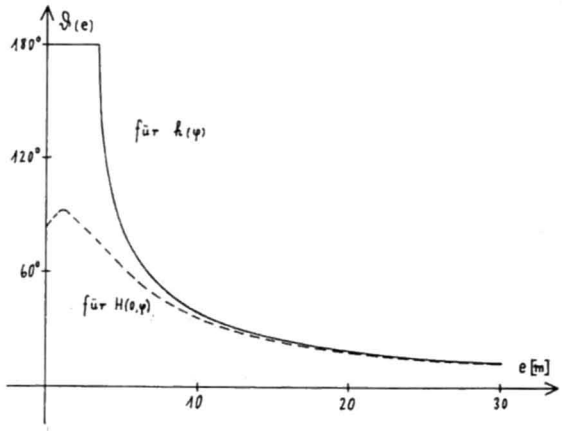

Abb. 9. Die Breite ϑ der Hauptschleife von $h(\varphi)$ bzw. $H(o,\varphi)$ als Funktion des Geophonabstandes e.
The width ϑ of the central lobe of $h(\varphi)$ and $H(o,\varphi)$ as function of the geophone distance e.

Das Superpositionsmass $h(\delta, \varphi)$ wie es in (98) definiert ist, vergleicht die Energie Q_m bei der Geophongruppe mit Q_1 beim Einzelgeophon jeweils für dieselbe Wellenrichtung. Die Energie Q_1 und somit auch die Registrierempfindlichkeit des Einzelgeophons ist aber wegen (78) und (96) über den Faktor C nach (32) noch selber richtungsabhängig, eben wegen der Tatsache, dass das Geophon ein Vertikalseismograph ist. Wenn wir nun statt Q_1 als Vergleichswert die Energie $\overset{*}{Q}_1$ wählen, die das Einzelgeophon aufnimmt, wenn es vertikal

von unten aus der Richtung $\varphi = 90°$, $\delta = 0°$ erregt wird, so werden wir auf die Definition folgender Funktion geführt:

$$H(\delta, \varphi) = \sqrt[+]{\frac{R_1 Q_m}{R_m \overset{*}{Q}_1}} = h(\delta, \varphi)\, C(\delta, \varphi) \tag{196}$$

Diese Funktion $H(\delta, \varphi)$ ist der absoluten Registrierempfindlichkeit proportional und repräsentiert vor allem vollständig deren Richtungsabhängigkeit. Im Falle der Reihenaufstellung ist h nach (122) von δ unabhängig. Wir erhalten dann nach (32) und (196)

$$H(\delta, \varphi) = h(\varphi) \cos \delta \sin \varphi \tag{197}$$

Für das Einzelgeophon ist $h = 1$. Unser Mass für die Registrierempfindlichkeit wird dann

$$H_1(\delta, \varphi) = C(\delta, \varphi) = \cos \delta \sin \varphi \tag{198}$$

Wenn man die Zeichenebenen der Figuren 8a, 8b und 8c als die Ebene $\delta = 0$ eines räumlichen Polarkoordinatensystems nach Abb. 1 auffasst, so gelangt man nach (197) von den Kurven für $h(\varphi)$ zu der graphischen Darstellung von $H(0, \varphi)$ durch Multiplikation mit dem jeweiligen $\sin \varphi$. An Abb. 8c erkennt man, dass dabei die für grössere e auftretenden Nebenschleifen weit in den Einheitskreis hinein zurückgedrängt werden, und zwar weiter als die entsprechenden Schleifen des stationären Falles. Die Hauptschleifen in den drei Abbildungen werden dagegen nicht kürzer, sondern nur schmäler. Die Breite der Hauptschleife von $H(0,\varphi)$ ist in Abb. 9 durch die gestrichelte Kurve dargestellt. Bei der Ermittlung dieser Kurve war für einzelne Abstände e die Lösung von transzendenten Gleichungen erforderlich, was mit Hilfe der Kurve für $h(\tau_0)$ aus Abb. 7 graphisch durchgeführt wurde.

Wenn wir uns zunächst auf die Ebene $\delta = 0$ beschränken, so können wir für unser Beispiel die bisherigen Überlegungen folgendermassen zusammenfassen: Die Registrierempfindlichkeit der Geophongruppe ist für fast-vertikale Richtungen wesentlich grösser und für die meisten anderen Richtungen wesentlich kleiner als die des Einzelgeophons. Die Selektion der vertikalen Richtung ist bei der Geophongruppe sehr viel besser als beim Einzelgeophon und sie kann durch Vergrösserung von e weiter verschärft werden. Diese Ergebnisse wurden auf Grund einer der physikalischen Wirklichkeit weitgehend entsprechenden, impulsgemässen Behandlung des Beispiels gewonnen.

Es ergeben sich hieraus für die Anwendung in der praktischen Seismik folgende Gedanken: In vielen Fällen wird der Absolutbetrag des Superpositionsmasses für fast-vertikale Richtungen und die darin zum Ausdruck kommende „natürliche" Verstärkung durch den Superpositionseffekt der Geophongruppe

den Praktiker weniger interessieren. Die hochentwickelte Verstärkertechnik, wie sie beim Bau moderner seismischer Apparaturen zur Anwendung kommt, gibt ihm viel wirksamere Mittel an die Hand, für Registrierzwecke zur Verfügung stehende Spannungen zu verstärken. In anderen Fällen, wo es um die Registrierung sehr schwacher Reflexionen geht, was in der Praxis sehr oft vorkommt, spielt das bereits in der Einleitung erwähnte Amplitudenverhältnis von Nutzsignal zu Störpegel (signal to noise ratio) eine wesentliche Rolle. Es ist aber zu erwarten, dass für dieses Verhältnis jedoch der Absolutbetrag des Superpositionsmasses, wie er zum Beispiel für die vertikale Richtung in unseren numerischen Beispielen durch Abb. 5 sowie (191) und (192) gegeben ist, wichtige Bedeutung hat Wir wollen aber im Rahmen der vorliegenden Untersuchung auf diese Zusammenhänge nicht näher eingehen. Die Richtungsabhängigkeit des Superpositionsmasses und damit der Registrierempfindlichkeit der Geophongruppe ist jedoch ein Effekt, der sich durch Apparaturen ausser der Geophongruppe selber wohl kaum erzielen lässt. Man kann diesen Effekt zum Beispiel dazu benutzen, um seitliche Reflexionen von Verwerfungen oder von Flanken synklinaler Reflexionshorizonte wesentlich abzuschwächen und so deren störenden Einfluss auf das Seismogramm zu verringern.

Betrachten wir nun in dem räumlichen Polarkoordinatensystem nach Abb. 1 anstatt der Ebene $\delta = 0$ jetzt die Ebene $\varphi = \pi/2$, so liegen völlig andere Verhältnisse vor. Weil für die Reihenaufstellung das Superpositionsmass h von δ unabhängig ist, ist die Schnittlinie der Ebene $\varphi = \pi/2$ mit der Fläche $h = h(\delta, \varphi)$ ein Halbkreis mit dem Radius h_0. Das Mass für die absolute Registrierempfindlichkeit wird nach (197)

$$H(\delta, \pi/2) = h_0 \cos \delta \tag{199}$$

Aus einem Vergleich mit (198) sieht man, dass für die Ebene $\varphi = \pi/2$ die Selektion der vertikalen Richtung beim Einzelgeophon durch Anwendung der Geophongruppe nicht verbessert werden kann. Die Hauptschleifenbreite der Kurve nach (199) ist immer 84° und ist von der Wahl von e unabhängig. Die praktische Anwendungsmöglichkeit, die sich oben in der Ebene $\delta = 0$ aus der Richtungsabhängigkeit des Superpositionseffektes ergab, besteht also für die Ebene $\varphi = \pi/2$ nicht.

In diesem Nachteil kommt die niedere azimutale Symmetrie der Reihenaufstellung zum Ausdruck. Man kommt der idealen azimutalen Symmetrie des Einzelgeophons schon wesentlich näher, wenn man m^2 Geophone auf der Fläche eines Quadrates der Kantenlänge $(m\text{-}1)e$ so aufstellt, dass die Geophone auf den Ecken eines quadratischen Netzes der Netzkonstanten e stehen. Für eine solche Geophongruppe in "Quadrataufstellung" würde die Richtungsabhängigkeit des Superpositionseffektes für eine praktische Anwendung noch viel günstiger sein als bei der Reihenaufstellung. Einzelheiten könnten hier

aber auch wieder nur durch die Betrachtung eines entsprechenden Beispieles geklärt werden.

In den letzteren Erörterungen dieses Abschnittes spielte die Länge und Form der Hauptschleifen von $h(\varphi)$ eine grosse Rolle. Aus den Abbildungen 7 und 8 ersieht man aber, dass diese Hauptschleifen von $h(\varphi)$ mit denen von $\bar{h}(\varphi)$ in unserem Beispiel fast zusammenfallen. Man könnte also einige wichtige Diskussionsergebnisse auch bei einer nur stationären Behandlung unseres Beispiels erzielen. Der Grund dafür, dass die erwähnten Hauptschleifen fast gleich verlaufen, liegt in der mathematischen Verwandtschaft der gedämpft sinusförmigen Erregung in unserem Beispiel zur stationär sinusförmigen. Für andere Impulsformen, etwa nach (225) und (229), kann die Ersetzung der impulsgemässen Behandlung durch eine stationäre auch für die Hauptschleifen von $h(\varphi)$ viel ungünstiger und ungenauer sein.

Die Diskussionsergebnisse dieses Abschnittes waren nicht das Hauptziel der vorliegenden Untersuchung. Vielmehr handelte es sich insgesamt darum, die Theorie der Geophongruppe, eines wichtigen Gerätes der modernen Seismik und physikalischen Lagerstättenforschung, weiter zu klären. Es ging um die Entwicklung eines möglichst vielseitigen Systems von Begriffen und Methoden, von dem her man die Lösung von Einzelfragen und die numerische Behandlung von Beispielen aufgreifen kann.

7. Abschnitt: Anhang über Beispiele impulsförmiger Erregungen

7. 1) *Ergänzende Bemerkungen zur Schwingungsgleichung*

In diesem Anhang wollen wir für die numerische Untersuchung von Beispielen nützliches Formelmaterial über einige einfache Impulsfunktionen $f(u)$ bereitstellen. Die hier behandelten Impulsfunktionen genügen alle den im Abschnitt 2.2 geforderten Bedingungen. Sie sind also alle stetig und stückweise glatt. Die Funktionen selbst und ihre ersten Ableitungen sind dem Betrage nach beschränkt, und die Forderung (31) ist erfüllt. Darüber hinaus haben einige der angegebenen Impulsfunktionen die physikalisch sinnvolle Eigenschaft, dass sie ganz glatt sind oder dass sogar ihre ersten Ableitungen $\dot{f}(u)$ ganz glatt sind. Wegen (30) brauchen wir hier die Impulsfunktionen nur für das Intervall $u \geqslant 0$ anzugeben.

Uns interessiert für die einzelnen Impulsfunktionen $f(u)$ die zugehörige Lösung der Differentialgleichung (65) mit den Anfangsbedingungen (66), und zwar gleich in der Gestalt $\dot{y}(u)$ nach (69). Da für diesen Abschnitt nur die mathematische Form von (65) interessiert, wollen wir beim Dämpfungsmass den Index m weglassen:

$$\ddot{y}(u) + 2\,\alpha\,\dot{y}(u) + y(u) = -\ddot{f}(u) \tag{200}$$

In der angewandten Seismik ist in der Regel sowohl für das Einzelgeophon als auch bei der Geophongruppe das Dämpfungsmass $\alpha < 1$. Wir wollen uns deshalb bei der Lösung von (200) für die einzelnen $f(u)$ immer auf diesen Fall $\alpha < 1$ beschränken. Wenn man die zu (200) gehörende homogene Differentialgleichung mit dem Exponentialansatz löst, so erhält man bei $\alpha < 1$ als allgemeine Lösung eine gedämpfte Schwingung. Die Frequenz dieser Schwingung heisst die Eigenfrequenz des schwingenden Systems. Sie wird bestimmt durch die reelle Grösse

$$\beta = \sqrt[+]{1 - \alpha^2} \tag{201}$$

Mit ihrer Verwendung ergibt sich im Falle $\alpha < 1$ die gesuchte Lösung $\dot{y}(u)$ von (200) nach (69) zu

$$\dot{y}(u) = -\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{s^3\,\mathfrak{L}\{f(u)\}}{(s+\alpha)^2 + \beta^2}\right\}; \quad u > 0 \tag{202}$$

Durch Differentiation der ersten Gleichung von (66) folgt

$$\dot{y}(u) = 0; \quad u < 0 \tag{203}$$

Wir brauchen also im Folgenden die Lösungen $\dot{y}(u)$ nur für positive u anzugeben. Entsprechend den Ausführungen im Abschnitt 1.2 über die dortige Funktion $x(t)$ überlegt man sich, dass die Lösung $\dot{y}(u)$ stückweise glatt ist und an den u-Stellen unstetig ist, an denen $f(u)$ Ecken hat. Für eine solche Unstetigkeitsstelle u_0 gilt

$$\dot{y}\{u_0 + 0\} - \dot{y}\{u_0 - 0\} = \dot{f}\{u_0 - 0\} - \dot{f}\{u_0 + 0\} \tag{204}$$

Eine Impulsfunktion $f(u)$ möge sich als Linearkombination von k anderen Impulsfunktionen $f_n(u)$ darstellen lassen:

$$f(u) = \sum_{1}^{k}{}^{n}\, a_n f_n(u) \tag{205}$$

Wenn nun die zu den einzelnen Impulsen $f_n(u)$ gehörenden Lösungen $\dot{y}_n(u)$ bekannt sind, so ergibt sich die zu $f(u)$ gehörende Lösung $\dot{y}(u)$ wegen der Linearität von (200) aus den $\dot{y}_n(u)$ als die gleiche Linearkombination:

$$\dot{y}(u) = \sum_{1}^{k}{}^{n}\, a_n \dot{y}_n(u) \tag{206}$$

Insbesondere sieht man, dass die Multiplikation einer Impulsfunktion mit einem konstanten Faktor auch die Multiplikation der zugehörigen Lösung mit demselben Faktor bedeutet.

7. 2) *Sinusimpuls*

Der Sinusimpuls ist gegeben durch

$$\left.\begin{array}{lll} f(u) = \sin \varkappa u; & 0 \leqslant u \leqslant \rho\pi/\varkappa \\ f(u) = 0 \quad ; & u \geqslant \rho\pi/\varkappa \end{array}\right\} \tag{207}$$

Dabei ist ρ eine ganze positive Zahl, die angibt, aus wieviel halben Sinusschwingungen der Impuls besteht. Der Sinusimpuls ist nur stückweise glatt; die Ecken sind $u = 0$ und $u = \rho\pi/\varkappa$. Die zugehörige Bildfunktion ist

$$\mathfrak{L}\{f(u)\} = \frac{\varkappa}{s^2 + \varkappa^2}\left[1-(-1)^\rho e^{-\frac{\rho\pi}{\varkappa}s}\right] \tag{208}$$

Damit erhält man nach (202) die Lösung

$$\left.\begin{array}{ll} \dot{y}(u)=c_1 \sin \varkappa u+c_2 \cos \varkappa u+e^{-\alpha u}(c_3 \sin \beta u+c_4 \cos \beta u); & 0 < u < \rho\pi/\varkappa \\ \dot{y}(u) = e^{-\alpha u}(c_5 \sin \beta u + c_6 \cos \beta u) \quad ; & u > \rho\pi/\varkappa \end{array}\right\} \tag{209}$$

Sie ist unstetig an den Stellen $u = 0$ und $u = \rho\pi/\varkappa$. Die Konstanten berechnen sich nach den Formeln:

$$\left.\begin{array}{lll} c_1 = \frac{1}{N^2} 2\alpha\varkappa^4 & ; & c_5 = (1-A)\, c_3 - Bc_4 \\ c_2 = \frac{\varkappa^3}{N^2}(1-\varkappa^2) & ; & c_6 = (1-A)\, c_4 + Bc_3 \\ c_3 = \frac{\alpha\varkappa}{\beta N^2}(4\alpha^2\varkappa^2 - 3\varkappa^2 + 1) & ; & A = (-1)^\rho e^{\alpha\frac{\rho\pi}{\varkappa}} \cos \beta \frac{\rho\pi}{\varkappa} \\ c_4 = -c_2 - \varkappa & ; & B = (-1)^\rho e^{\alpha\frac{\rho\pi}{\varkappa}} \sin \beta \frac{\rho\pi}{\varkappa} \\ N^2 = (1-\varkappa^2)^2 + 4\alpha^2\varkappa^2 & ; & \end{array}\right\} \tag{210}$$

7. 3) *Einseitiger Kosinusimpuls*

Der einseitige Kosinusimpuls ist gegeben durch

$$\left.\begin{array}{lll} f(u) = 1 - \cos \varkappa u; & 0 \leqslant u \leqslant 2\pi/\varkappa \\ f(u) = 0 \quad ; & u \geqslant 2\pi/\varkappa \end{array}\right\} \tag{211}$$

Dieser Impuls ist für die Seismik von MATUZAWA (1927) näher untersucht worden. Er hat den Vorteil, dass er ganz glatt ist. Die zugehörige Bildfunktion ist

$$\mathfrak{L}\{f(u)\} = \frac{\varkappa^2}{s(s^2+\varkappa^2)}\left(1 - e^{-\frac{2\pi}{\varkappa}s}\right) \tag{212}$$

Die Lösung nach (202) ist

$$\left.\begin{array}{ll} \dot{y}(u)=c_1 \sin \varkappa u+c_2 \cos \varkappa u+e^{-\alpha u}(c_3 \sin \beta u + c_4 \cos \beta u); & 0 \leqslant u \leqslant 2\pi/\varkappa \\ \dot{y}(u)=e^{-\alpha u}(c_5 \sin \beta u + c_6 \cos \beta u) \quad ; & u \geqslant 2\pi/\varkappa \end{array}\right\} \tag{213}$$

Sie ist im Gegensatz zu (209) stetig. Die konstanten berechnen sich nach folgenden Formeln:

$$\left.\begin{array}{ll} c_1 = \frac{\varkappa^3}{N^2}(1-\varkappa^2) & ; \quad c_5 = (1-A)\,c_3 - B\,c_4 \\ c_2 = -\frac{1}{N^2}\,2\,\alpha\,\varkappa^4 & ; \quad c_6 = (1-A)\,c_4 + B\,c_3 \\ c_3 = \frac{\varkappa^2}{\beta N^2}(\varkappa^2 - 2\,\alpha^2\varkappa^2 - 1) & ; \quad A = e^{\alpha\frac{2\pi}{\varkappa}}\cos\beta\,\frac{2\pi}{\varkappa} \\ c_4 = -\,c_2 & ; \quad B = e^{\alpha\frac{2\pi}{\varkappa}}\sin\beta\,\frac{2\pi}{\varkappa} \\ N^2 = (1-\varkappa^2)^2 + 4\,\alpha^2\varkappa^2 & ; \end{array}\right\} \tag{214}$$

7. 4) *Schwebungsähnlicher Impuls*

Der schwebungsähnliche Impuls ist gegeben durch

$$\left.\begin{array}{lll} f(u) = \sin\varkappa u - \frac{\rho}{\rho+2}\sin\frac{\rho+2}{\rho}\varkappa u\,; & 0 \leqslant u \leqslant \rho\pi/\varkappa \\ f(u) = 0 & ; \quad u \geqslant \rho\pi/\varkappa \end{array}\right\} \tag{215}$$

Darin ist ρ eine ganze positive Zahl, die angibt, aus wieviel Halbschwingungen oder Auslenkungen der Impuls besteht. Der schwebungsähnliche Impuls setzt sich aus zwei harmonischen Komponenten zusammen, deren Frequenzen zwar in einem rationalen Verhältnis stehen, deren Amplituden aber verschieden gross sind. Deshalb verläuft der Hauptteil der Impulsfunktion (215) auch nicht genau wie eine Schwebung, obwohl auch hier praktisch die Amplitude einer Schwingung anschwillt und symmetrisch abklingt. Der Unterschied zu einer Schwebung besteht darin, dass die Frequenz der amplitudenmodulierten Schwingung nicht ganz konstant bleibt, sondern sich geringfügig, und zwar symmetrisch wie die Amplitude ändert. Für $\rho = 1$ und $\rho = 2$ ist der schwebungsähnliche Impuls von MARTIN (1935, 1953*a*) angegeben worden. Der Impuls hat den Vorteil, dass sowohl er selber als auch seine erste Ableitung ganz glatt sind.

Man könnte nun die zugehörige Lösung von (200) genau wie in den Abschnitten 7.2 und 7.3 über (202) mit Hilfe der Bildfunktion von (215) ermitteln. Es ist hier aber viel einfacher, den vorliegenden Fall mittels (205) und (206) auf den Fall des Sinusimpulses nach Abschnitt 7.2 zurückzuführen. Aus (215) folgt

$$f(u) = f_1(u) - \frac{\rho}{\rho+2}\,f_2(u) \tag{216}$$

wobei gilt

$$\left.\begin{aligned} f_1(u) &= \sin \varkappa u; \quad 0 \leqslant u \leqslant \rho\pi/\varkappa \\ f_1(u) &= 0 \quad\quad ; \quad\quad u \geqslant \rho\pi/\varkappa \end{aligned}\right\} \tag{217}$$

und

$$\left.\begin{aligned} f_2(u) &= \sin \bar{\varkappa} u; \quad 0 \leqslant u \leqslant \bar{\rho}\pi/\bar{\varkappa} = \rho\pi/\varkappa \\ f_2(u) &= 0 \quad\quad ; \quad\quad u \geqslant \bar{\rho}\pi/\bar{\varkappa} = \rho\pi/\varkappa \end{aligned}\right\} \tag{218}$$

mit

$$\bar{\varkappa} = \frac{\rho + 2}{\rho}\varkappa; \quad \bar{\rho} = \rho + 2 \tag{219}$$

Die Impulsfunktionen (217) und (218) sind wie (207) Sinusimpulse. Die zugehörigen Lösungen $\dot{y}_1(u)$ und $\dot{y}_2(u)$ lassen sich nach (209) und (210) ermitteln. Der Unterschied zwischen $\dot{y}_1(u)$ und $\dot{y}_2(u)$ besteht darin, dass bei $\dot{y}_2(u)$ in (209) und (210) immer $\bar{\varkappa}$ beziehungsweise $\bar{\rho}$ nach (219) an die Stelle von $\varkappa$ beziehungsweise ρ tritt. Die zu (215) gehörende Lösung von (200) ist jetzt nach (205) und (206) wegen (216)

$$\dot{y}(u) = \dot{y}_1(u) - \frac{\rho}{\rho + 2}\,\dot{y}_2(u) \tag{220}$$

Sie ist eine stetige Funktion.

7. 5) *Gedämpfte Sinusschwingung*

Die gedämpfte Sinusschwingung ist gegeben durch

$$f(u) = e^{-\lambda u} \sin \varkappa u; \quad u \geqslant 0; \quad \lambda > 0 \tag{221}$$

Dieser Impuls hat nur an der Stelle $u = 0$ eine Ecke. Die zugehörige Bildfunktion ist

$$\mathfrak{L}\{f(u)\} = \frac{\varkappa}{(s + \lambda)^2 + \varkappa^2} \tag{222}$$

Nach (202) erhält man die Lösung

$$\dot{y}(u) = e^{-\lambda u}(c_1 \sin \varkappa u + c_2 \cos \varkappa u) + e^{-\alpha u}(c_3 \sin \beta u + c_4 \cos \beta u); \; u > 0 \tag{223}$$

Sie ist unstetig an der Stelle $u = 0$. Für praktische Rechnungen hat dieser Impuls gegenüber den bisherigen den Vorteil, dass die Lösung $\dot{y}(u)$ für alle positiven u durch nur eine Gleichung gegeben ist. Die Konstanten sind durch folgende Formeln gegeben

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{N^2}\left[(\varkappa^2 - \lambda^2)\,A + \lambda B(B + 1)\right]; \quad A = 2(\alpha\lambda^2 + \alpha\varkappa^2 - \lambda) \\ c_2 &= \frac{\varkappa}{N^2}\left[2\,\lambda A - B(B + 1)\right] \quad\quad ; \quad B = \lambda^2 + \varkappa^2 - 1 \\ c_3 &= -\frac{\varkappa}{\beta N^2}\left[(1 - 2\,\alpha^2)A + \alpha B\right] \quad ; \quad N^2 = A^2 - 2\alpha AB + B^2 \\ c_4 &= -c_2 - \varkappa \end{aligned}\right\} \tag{224}$$

7. 6) *Gedämpfte Potenzen*

Die gedämpften Potenzen sind gegeben durch

$$f_n(u) = e^{-\lambda u} u^n; \quad u \geqslant 0; \quad \lambda > 0; \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{225}$$

Diese Impulsfunktionen wurden von MARTIN (1942, 1953a, 1953b [1])) und ZÁTOPEK (1950a, 1950b) benutzt und behandelt. An der Stelle $u = 0$ hat $f_1(u)$ eine Ecke. Für $n \geqslant 2$ sind die Impulsfunktionen (225) ganz glatt und für $n \geqslant 3$ sind auch ihre ersten Ableitungen ganz glatt. Die zu (225) gehörenden Bildfunktionen sind

$$\mathfrak{L}\{f_n(u)\} = \frac{n!}{(s+\lambda)^{n+1}} \tag{226}$$

Die zugehörigen Lösungen nach (202) lauten

$$\dot{y}_n(u) = e^{-\lambda u}\left(\sum_0^n {}^{\nu} c_{n,\nu} u^\nu\right) + e^{-\alpha u}\left(b_{n,1} \sin \beta u + b_{n,2} \cos \beta u\right); \quad u > 0 \tag{227}$$

An der Stelle $u = 0$ ist $\dot{y}_1(u)$ unstetig. Alle anderen $\dot{y}_n(u)$ sind stetige Funktionen. Die Konstanten berechnen sich nach folgenden Formeln:

$$\left.\begin{array}{ll}
c_{n,\nu} = \dfrac{n!}{\nu! N^{n-\nu+1}} A_{n-\nu}; \; \nu = 0, 1, \ldots, n; & N = \lambda^2 - 2\alpha\lambda + 1 \\
b_{1,1} = \dfrac{1}{\beta N^2}\left[A_2 + (\alpha - \lambda)(A_1 + N^2)\right] & ; \; A_0 = \lambda^3 \\
b_{1,2} = -c_{1,0} - 1 & ; \; A_1 = \lambda^2(4\alpha\lambda - \lambda^2 - 3) \\
b_{n,1} = \dfrac{n!}{\beta N^{n+1}}\left[A_{n+1} + (\alpha - \lambda) A_n\right]; \; n \geqslant 2 & ; \; A_2 = \lambda(4\alpha^2\lambda^2 - \lambda^2 - 6\alpha\lambda + 3) \\
b_{n,1} = \dfrac{n!}{\beta N^{n+1}}\left[(\lambda - \alpha) A_n - N A_{n-1}\right]; n \geqslant 3; & A_3 = 2(\lambda - \alpha) A_2 - N(A_1 - N^2) \\
b_{n,2} = -c_{n,0}; \; n \geqslant 2 & ; \; A_n = 2(\lambda - \alpha) A_{n-1} - N A_{n-2}; \\
 & \qquad n \geqslant 4
\end{array}\right\} \tag{228}$$

Wenn man die gedämpften Potenzen (225) nach (205) linear kombiniert, so erhält man die Impulsfunktion

$$f(u) = g(u) e^{-\lambda u}; \quad u \geqslant 0; \quad \lambda > 0 \tag{229}$$

wo $g(u)$ folgende ganze rationale Funktion bedeutet:

$$g(u) = \sum_1^k {}^n a_n u^n \tag{230}$$

[1]) Die von MARTIN (1953b) in Tabelle VII Seite 219 angegebenen Konstanten enthalten Druckfehler!

Man sieht, dass die beiden Funktionen $f(u)$ und $g(u)$ die gleichen Nullstellen haben. Wir könnten bei dem Impuls nach (229) von einem gedämpften Polynom k-ten Grades sprechen.

Wenn wir zulassen, dass k in (230) beliebig gross sein kann, dann bedeutet (230) die Darstellung einer Funktion $g(u)$ durch eine Potenzreihe. In (229) ist dann $f(u)$ durch eine gedämpfte Potenzreihe dargestellt oder nach gedämpften Potenzen (225) entwickelt. Man erkennt jetzt an (229) leicht die Gültigkeit folgenden Satzes: Jede Impulsfunktion $f(u)$, die sich im Bereich $u \geqslant 0$ durch eine Potenzreihe darstellen lässt, kann man nach gedämpften Potenzen entwickeln. Die Potenzreihe für $g(u)$ ergibt sich einfach als die Produktreihe der gegebenen Potenzreihe für $f(u)$ und der für $e^{\lambda u}$. Umgekehrt braucht aber nicht jede gedämpfte Potenzreihe eine Impulsfunktion in unserem Sinne zu sein. Wir wollen diese Zusammenhänge nicht weiter untersuchen. Es ist hier nur wichtig, dass sich sicherlich eine grosse Gruppe von analytisch vorgegebenen oder experimentell gefundenen Impulsfunktionen durch gedämpfte Polynome nach (229) und (230) annähern lassen. Die zugehörigen Lösungen von (200) können dann über (206), (227) und (228) ermittelt werden.

Herr Professor Dr.-Ing. O. Rosenbach vom Institut für Meteorologie und Geophysik der Johannes Gutenberg — Universität Mainz betreute die Arbeit als Dissertation. Er nahm laufend am Fortgang der Untersuchung regen Anteil und unterstützte mich durch wertvolle Ratschläge. Ich bin ihm wegen seiner grossen Hilfsbereitschaft sehr zu Dank verpflichtet.

Weiter schulde ich der Firma PRAKLA, Gesellschaft für praktische Lagerstättenforschung G.m.b.H., Hannover grossen Dank. Sie ermöglichte die Durchführung der Arbeit durch grosszügige Förderung.

Literaturnachweis

Dennison, A. T., 1953, The Design of Electromagnetic Geophones, Geophysical Prospecting, v. 1, p. 3.

Doetsch, G., 1950, Handbuch der Laplace-Transformationen, Bd. I. Verlag Birkhäuser, Basel.

Gröbner, W. und Hofreiter, N., 1949, Integraltafel, Bd. II. Verlag Springer, Wien.

Hales, F. W. and Edwards, T. E., 1955, Some Theoretical Considerations on the Use of Multiple Geophones arranged Linearly along the Line of Traverse, Geophysical Prospecting, v. 3, p. 65.

Johnson, C. H., 1939, Steady State Polar Sensitivity Curves, Geophysics, v. 4, p. 33.

Lombardi, L. V., 1955, Notes on the Use of Multiple Geophones, Geophysics, v. 20, p. 215.

Martin, H., 1935, Einschwingvorgänge und ihre Bedeutung bei der Aufzeichnung stossähnlicher Erschütterungen, Veröffentlichungen der Reichsanstalt für Erdbebenforschung, Jena, H. 26, S. 1-40.

Martin, H., 1942, Einschwingvorgang und Stossaufzeichnung, Physikalische Zeitschrift, v. 43, S. 222-226.

MARTIN, H., 1953a, Beitrag zur Theorie der Einschwingvorgänge mit besonderer Berücksichtigung des ballistischen Galvanometers,
Gerlands Beiträge zur Geophysik, v. 62, S. 275.

MARTIN, H., 1953b, Theorie der Aufzeichnung eines Stosses mit Hilfe des elektrodynamischen Erschütterungsmessers.
Gerlands Beiträge zur Geophysik, v. 63, S. 209.

MATUZAWA, T., 1927, Earthquake Motion with a Constant Acceleration?
Proc. of the Imp. Acad. of Japan, v. 3, p. 68-71.

PARR, J. O. and MAYNE, W. H., 1955, A New Method of Pattern Shooting,
Geophysics, v. 20, p. 539.

REYNOLDS, F. F., 1954, Design Factors for Multiple Arrays of Geophones and Shot Holes,
The Oil and Gas Journal, v. 19, p. 145.

ZÁTOPEK, A., 1950a, Dynamical Magnification of a Seismograph excited by a Shock of the Form $\lambda^n e^{-\lambda\tau} \tau^n$,
Časopis pro pěstováni matematiky a fysiky, roč. 75, 103-111.

ZÁTOPEK, A., 1950b, Sur le Mouvement du séismographe sous l'influence de deux formes du choc,
Publ. du Bureau Central Séismologique Intern., Bd. 17, S. 81-88.