Dispersion von seismischen Oberflächenwellen nach Registrierungen in Kopenhagen und Groß-Raum

---

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde
einer Hohen Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Albertus-Universität

zu

Königsberg i. Pr.

Vorgelegt von

Heinz Menzel
aus Wehlau, Ostpr.

Königsberg i. Pr. 1939

Gedruckt mit Genehmigung der Hohen Naturwissenschaftlichen Fakultät der Albertus-Universität zu Königsberg (Pr.)

Referent: Professor Dr. Errulat
Korreferent: Professor Dr. Andrée

Tag der mündlichen Prüfung: 24. 11. 38

Diese Arbeit erschien gleichzeitig in
„Gerlands Beiträge zur Geophysik" Bd. 54 (1939) H. 4

Dispersion von seismischen Oberflächenwellen nach Registrierungen in Kopenhagen und Groß-Raum

Von
Heinz Menzel, Wehlau (Ostpr.)

(Mit 4 Figuren)

Zusammenfassung: Aus den WIECHERT-Seismographen-Registrierungen von Kopenhagen und Groß-Raum wird eine Dispersionskurve für Querwellen abgeleitet. Die mathematische Untersuchung der Dispersionsgleichung für ein zweifach geschichtetes Medium ergibt, daß die beobachtete Dispersionskurve mit der theoretischen in Einklang gebracht werden kann, wenn man die gemessenen Wellengeschwindigkeiten als Gruppengeschwindigkeiten auffaßt. Die für das Untersuchungsgebiet gültigen Schichtdicken werden berechnet und zu $d = 27.2$ km bzw. $d = 40.2$ km erhalten.

Inhalt: Zusammenfassung S. 348. — Einleitung S. 348. — I. Die Messungen S. 348. — a) Das Material S. 348. — b) Die Fehlerabschätzung S. 350. — II. Die Auswertung der Messungen S. 353. — a) Die Diskussion der Dispersionskurve S. 350. — b) Die Berechnung der Schichtdicken S. 365.

Einleitung.

Diese Arbeit hat das Ziel, eine Dispersionskurve seismischer Oberflächenwellen zu finden und zu prüfen, ob sie sich zu den Untergrundverhältnissen eines verhältnismäßig kleinen Gebietes in Beziehung setzen läßt. Sie schließt damit an die Untersuchungen von GUTENBERG[1]), JEFFREYS[3]), STONELEY[2, 4]), TILLOTSON[4]), ROHRBACH[6]) und VON ZUR MÜHLEN[7, 8]) an.

In den Arbeiten der angeführten Autoren ist die Frage noch umstritten, ob es sich bei den Geschwindigkeiten, die aus den Messungen an den Diagrammen berechnet werden, um Phasen- oder Gruppengeschwindigkeiten handelt. Es soll versucht werden, diese Frage zu entscheiden.

I. Die Messungen.

a) Das Material.

In einer Dispersionskurve wird die Wellengeschwindigkeit als Funktion der Periode dargestellt. Da die Oberflächenwellen keinesfalls

im Epizentrum entstehen, kann man ihre Geschwindigkeit nicht durch den Quotienten von Epizentralentfernung und Laufzeit ermitteln. Zwar haben ROHRBACH und VON ZUR MÜHLEN den Versuch unternommen, die Entstehungsentfernung von Oberflächenwellen bestimmter Perioden festzustellen, doch sind deren Ergebnisse nicht genau genug, um die Wellengeschwindigkeit aus der Entstehungsentfernung, der Zeit der Entstehung und der Laufzeit zu berechnen. Ein solches Verfahren verbietet sich auch schon deshalb, weil die Geschwindigkeit der Oberflächenwellen von der geologischen Beschaffenheit des durchlaufenen Gebietes abhängig ist, zwischen Entstehungspunkt und Beobachtungsstation also nicht konstant zu sein braucht. Es wurde daher in der vorliegenden Arbeit für jede beobachtete Periode die mittlere Geschwindigkeit aus den Registrierungen zweier Stationen abgeleitet, die so dicht beieinander liegen, daß man zwischen ihnen einigermaßen gleichartige Untergrundverhältnisse und daher für jede Periode konstante Wellengeschwindigkeit annehmen kann.

Eine wichtige Rolle spielt auch die Gleichartigkeit der Seismogramme. Es wurde zunächst versucht, die Dispersionskurve aus den Aufzeichnungen von Groß-Raum und Lemberg zu gewinnen. In Lemberg sind Horizontalpendel nach BOSCH-OMORI mit 30^s Eigenperiode, in Groß-Raum WIECHERT-Seismographen mit etwa 9^s Eigenperiode aufgestellt. Die auf diesen beiden Stationen erhaltenen Seismogramme sind einander völlig unähnlich. Es zeigt sich, daß die Bestimmung der Dispersionskurve aus den Aufzeichnungen dieser beiden Stationen mit einer starken Unsicherheit behaftet ist. Aus diesem Grunde wurden die Aufzeichnungen von Kopenhagen und Groß-Raum ausgewählt. In beiden Stationen arbeiten WIECHERT-Seismographen. In Kopenhagen betrug die Eigenperiode der Horizontalkomponenten etwa 9.5^s, in Groß-Raum 8—9^s. Die Seismogramme dieser Stationen sind einander hinreichend ähnlich.

Zur Bearbeitung gelangten die Beben vom 5. 5. 1930, 10. 2. 1931 und vom 25. 9. 1931. Der Herd des ersten Bebens lag in Hinterindien. Die Epizentren der beiden anderen Beben lagen bei Sumatra, und zwar am 10. 2. 1931 bei 5°.3 S., 102°.5 E.; am 25. 9. 1931 bei 5°.1 S., 102°.7 E. Bei allen drei Beben beträgt die Azimutdifferenz von Kopenhagen und Groß-Raum nach dem International Seismological Summary nur 1°, so daß man annehmen kann, daß beide Stationen auf einem Bebenstrahl liegen. Trägt man in einem rechtwinkligen Koordinatensystem auf der Abszisse die Periode T, auf der Ordinate die Wellengeschwindig-

keit v auf, so lassen sich die Punkte aller drei Beben zwanglos durch eine Kurve verbinden (vgl. Fig. 1).

Bei der Auswertung der gemessenen Dispersionskurve ist die Frage von Bedeutung, ob es sich bei den beobachteten Wellen um RAYLEIGH- oder LOVE-Wellen handelt. Da einwandfrei zu identifizierende Wellen des ersten Typs mit sehr geringer Häufigkeit auftreten, die Auswertung der Dispersionskurve für RAYLEIGH-Wellen außerdem auf sehr erhebliche rechnerische Schwierigkeiten stößt, wurde die Untersuchung auf die der LOVE-Wellen beschränkt. Es wurden also nur Einsätze ausgewertet, die auf den Diagrammen der Vertikalseismographen gar nicht oder nur sehr schwach aufgezeichnet waren.

b) Die Fehlerabschätzung.

Die Auswertung der Seismogramme geschah in der üblichen Weise mit Hilfe einer in qmm geteilten Glasplatte. Die bei den Messungen auftretenden Fehler sind bedingt:

1. durch ungenaues Schätzen der Skalenteile,
2. durch das Schwanken der Minutenlänge,
3. durch die Unsicherheit beim Erkennen des Einsatzes einer Welle.

Die Schätzungsfehler wurden durch mehrmalige Wiederholung der Messungen verringert. Dem Schwanken der Minutenlänge wurde dadurch Rechnung getragen, daß bei der Umrechnung der gemessenen Längen in Zeitwerte jeweils die dazugehörige Minutenlänge zugrunde gelegt wurde. Die dritte Fehlerquelle ist namentlich bei Wellen großer Periode, die als „emersio“ auftauchen und von den Seismographen meistens schwach aufgezeichnet werden, schwer zu beseitigen. Das Erkennen eines Einsatzes ist Sache der Übung. Außerdem geht dabei ein systematischer Fehler ein, der durch die persönliche Auffassung des Beobachters bedingt wird. Dieser wird aber durch Bildung der Laufzeitdifferenzen vermindert.

Tab. 1 gibt die Laufzeitdifferenzen zwischen Kopenhagen und Groß-Raum, die Perioden und die Geschwindigkeiten. Die angegebenen Fehler sind mittlere Fehler. Zunächst wurden aus den Differenzen der einzelnen Messungen gegen die Mittelwerte die mittleren Fehler bei den Einsatzzeiten berechnet. Die mittleren Fehler der Laufzeitdifferenzen ergeben sich dann nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz.

Als Beispiel für den Gang der Rechnung sei die Berechnung des ersten Wertes der Tab. 1 wiedergegeben:

Einsatz in Kopenhagen	$14^h\,44^m\,22.2^s \pm 0.10^s$,
Einsatz in Groß-Raum .	$40^m\,36.5^s \pm 0.13^s$,
Laufzeitdifferenz . . .	$3^m\,45.7^s \pm 0.16^s$.

Die in Tab. 1 angegebenen Perioden sind nicht entfernt alle, die zu beobachten waren. Es sind nur diejenigen, welche sich einwandfrei einander zuordnen ließen. Bei dieser Zuordnung wurden zwei Forderungen erhoben:

1. Die Laufzeitdifferenz zwischen einem Einsatz in Kopenhagen

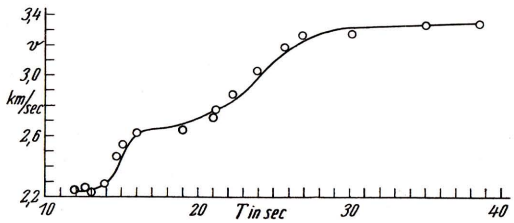

Fig. 1. Geschwindigkeit v bei Oberflächenwellen in Abhängigkeit von der Periode T nach den Seismogrammen von Groß-Raum und Kopenhagen.

und dem zuzuordnenden in Groß-Raum muß stets positiv sein und zwischen den Schranken 100^s und 500^s liegen; das bedeutet, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner als 5 km/sec und größer als 1 km/sec sein sollen.

2. Die Differenz zweier zusammengehöriger Perioden in Kopenhagen und Groß-Raum soll höchstens gleich dem größten der beiden Fehler sein. Für die Dispersionskurve wurde dann das arithmetische Mittel aus den in Kopenhagen und Groß-Raum gemessenen Perioden genommen. Diesem Werte wurde der größere der beiden Fehler zugeordnet.

Beispiel:

Periode in Groß-Raum .	$11.8^s \pm 0.05^s$,
Periode in Kopenhagen	$12.2^s \pm 0.85^s$,
Differenz der Perioden .	0.4^s,
Maximaler Fehler . . .	0.85^s.

$$T = 12.0^s \pm 0.85^s.$$

Der Fehler bei der Berechnung der Geschwindigkeit ist abhängig von der Ungenauigkeit in der Bestimmung der Einsatzzeiten und in der Ermittlung der Länge s des Weges, den die Oberflächenwellen zwischen Groß-Raum und Kopenhagen zurücklegen. Dieser ergibt sich als Differenz der beiden Epizentraldistanzen. s hängt von der Be-

Tabelle 1. Mittlere Perioden (T) bestimmter Einsätze in sec und zugehörige Laufzeitdifferenzen (t) zwischen Groß-Raum und Kopenhagen. Ferner Fortpflanzungsgeschwindigkeit (V) in km/sec und ihre Fehler.

T	t	V	$\Delta_1 v$	$\Delta_2 v$	Δv
12.0 ± 0.35	225.7 ± 0.16	2.25	0.001	0.002	0.002
12.7 ± 0.30	227.2 ± 0.20	2.24	0.001	0.002	0.002
13.0 ± 0.16	228.0 ± 0.27	2.23	0.001	0.003	0.003
13.9 ± 0.29	222.8 ± 0.27	2.28	0.001	0.003	0.003
14.9 ± 0.35	210.4 ± 0.31	2.46	0.001	0.004	0.004
15.2 ± 0.40	200.1 ± 0.32	2.54	0.002	0.004	0.004
15.9 ± 0.36	194.7 ± 0.36	2.61	0.002	0.005	0.005
16.0 ± 0.35	197.5 ± 0.34	2.62	0.002	0.005	0.005
19.0 ± 0.33	195.5 ± 0.41	2.65	0.002	0.006	0.006
21.1 ± 0.30	189.5 ± 0.39	2.74	0.002	0.006	0.006
21.2 ± 0.31	187.2 ± 0.44	2.77	0.002	0.007	0.007
22.4 ± 0.14	177.9 ± 0.42	2.86	0.002	0.007	0.007
24.0 ± 0.35	171.4 ± 0.39	3.02	0.002	0.007	0.007
25.8 ± 0.40	158.3 ± 0.40	3.21	0.002	0.008	0.008
27.0 ± 0.31	159.6 ± 0.43	3.25	0.002	0.009	0.009
30.2 ± 0.39	157.8 ± 0.46	3.28	0.002	0.010	0.010
35.0 ± 0.45	155.6 ± 0.49	3.33	0.002	0.010	0.010
38.4 ± 0.45	154.8 ± 0.94	3.34	0.002	0.020	0.020

stimmung des Epizentrums ab. Es ist nicht leicht, analytisch abzuschätzen, wie stark sich ein Fehler in der Bestimmung des Epizentrums bei der Berechnung von s auswirkt. Es wurde also folgendes empirische Verfahren eingeschlagen, um wenigstens einen ungefähren Anhalt hierfür zu bekommen. Bei den Beben vom 10. 2. und 25. 9. 1931 gibt „International Seismological Summary" als wahrscheinliche Fehler bei der Bestimmung des Epizentrums ±0°.3 bzw. ±0°.15 an. Das zweite Epizentrum liegt also innerhalb des Fehlerkreises des ersten und das erste nur wenig außerhalb des Fehlerkreises des zweiten Epizentrums (s. S. 349). Für das erste Beben ist die Differenz der Epizentraldistanzen 518.2 km, für das zweite 517.9 km. Als Fehler wird nun die Differenz 0.3 km angenommen. Derselbe Fehler soll auch für das Beben vom 5. 5. 1930 gelten. International Seismological Summary gibt nämlich für dieses Beben zwei Epizentralbestimmungen. Die eine lieferte die Koordinaten 17°.3 N, 96°.5 E, die andere 17°.2 N, 96°.7 E. Man sieht, daß die Unsicherheit in der Epizentralbestimmung etwa ebenso groß ist wie bei den beiden anderen Beben. Es ist natürlich klar, daß die Fehler bei den Epizentraldistanzen erheblich größer sind. Sie betragen

bei den Beben vom 10. 2. und 25. 9. 1931 5.5 bzw. 4.3 km. Bei der Bildung der Differenzen der Epizentraldistanzen heben sich diese Fehler aber zum größten Teil heraus.

Der Beitrag $\Delta_1 v$, den die Ungenauigkeit in der Bestimmung von s zum Fehler von v liefert, ist:

$$|\Delta_1 v| = \frac{|\Delta s|}{t} = \frac{0{,}3}{t},$$

wobei t die Laufzeitdifferenz ist. Der Beitrag der Ungenauigkeit der Laufzeit t zum Fehler von v ist:

$$|\Delta_2 v| = \frac{s}{t^2}|\Delta t| = v\frac{|\Delta t|}{t}.$$

Der Einfluß von $|\Delta_1 v|$ ist gegenüber dem von $|\Delta_2 v|$ so klein, daß $|\Delta_1 v|$ nicht berücksichtigt zu werden braucht (s. Tab. 1).

II. Die Auswertung der Messungen.

a) Die Diskussion der Dispersionskurve.

In seiner Arbeit „On the Surface Waves of Earthquakes“[3]) hat JEFFREYS die Dispersionskurve für LOVE-Wellen berechnet, unter der Annahme, daß über dem bis in große Tiefen als homogen vorausgesetzten Untergrunde eine Schicht mit kleinerer Dichte und kleinerem Torsionsmodul liegt. Vergleicht man die von ihm gezeichneten Dispersionskurven mit der hier gemessenen, so sieht man, daß in diesem Falle jene einfache Schichtung nicht angenommen werden kann. STONELEY und TILLOTSON[4]) haben die Dispersionsgleichung von LOVE-Wellen für den Fall ermittelt, daß zwei Schichten mit verschiedenen Dichten und Torsionsmoduln über dem Untergrunde liegen. In diesem Falle besteht die Dispersionskurve aus zwei Ästen. Sind b_1, b_2, b_3 die Geschwindigkeiten für die transversalen Vorläufer in der obersten Schicht, der zweiten Schicht und im Untergrunde, so gilt für den ersten Ast: $b_1 < v < b_2$, für den zweiten Ast: $b_2 < v < b_3$, wobei v die Phasengeschwindigkeit bezeichnet. Eine Anwendung von diesen Ergebnissen hat VON ZUR MÜHLEN[7,8]) gemacht. Er findet in seinen berechneten und gemessenen Kurven, daß diese beiden Äste durch einen Sprung in v voneinander getrennt werden. Abgesehen von diesem hier fehlenden Sprung bei $v = b_2$ hat die hier ermittelte Kurve eine große Ähnlichkeit mit der Dispersionskurve, die VON ZUR MÜHLEN gemessen hat. Das gab Veranlassung zu einer näheren Untersuchung der Dispersionsgleichung in der Umgebung von $v = b_2$. Dabei ergab es sich, daß ein Sprung nicht auftritt.

Nach STONELEY-TILLOTSON ist:

$$(1)\qquad -\mu_2^2 p_2^2 \mathfrak{Tg}\, p_2 d_2 - \mu_2 p_2 \mu_3 s_3 + \mu_1 s_1 \mu_2 p_2 \operatorname{tg} s_1 d_1 + \mu_1 s_1 \mu_3 s_3 \operatorname{tg} s_1 d_1 \mathfrak{Tg}\, p_2 d_2 = 0 \qquad b_1 < v < b_2$$

$$(2)\qquad \mu_2^2 s_2^2 \operatorname{tg} s_2 d_2 - \mu_2 s_2 \mu_3 s_3 + \mu_1 s_1 \mu_2 s_2 \operatorname{tg} s_1 d_1 + \mu_1 s_1 \mu_3 s_3 \operatorname{tg} s_1 d_1 \operatorname{tg} s_2 d_2 = 0 \qquad b_2 < v < b_3$$

dabei beziehen sich die Indizes 1, 2, 3 auf die oberste, die mittlere Schicht und den Untergrund, und es bedeuten:

$\mu =$ Torsionsmodul,
$b =$ Geschwindigkeit transversaler Vorläufer,
$d =$ Schichtdicke,
$T =$ Periode,
$v =$ Phasengeschwindigkeit der LOVE-Wellen.

$$s_1 = \frac{2\pi}{Tv}\sqrt{\frac{v^2}{b_1^2} - 1}, \quad s_2 = \frac{2\pi}{Tv}\sqrt{\frac{v^2}{b_2^2} - 1}, \quad p_2 = \frac{2\pi}{Tv}\sqrt{1 - \frac{v^2}{b_2^2}},$$

$$s_3 = \frac{2\pi}{Tv}\sqrt{1 - \frac{v^2}{b_3^2}}.$$

Beim Grenzübergang $v \longrightarrow b_2$ gilt:

$$p_2 \longrightarrow 0, \quad \frac{\mathfrak{Tg}\, p_2 d_2}{p_2} \longrightarrow d_2$$

$$s_2 \longrightarrow 0, \quad \frac{\operatorname{tg} s_2 d_2}{s_2} \longrightarrow d_2$$

und man erhält aus beiden Gleichungen:

$$(3)\qquad -\mu_2 \mu_3 s_3 + \mu_1 s_1 \mu_2 \operatorname{tg} s_1 d_1 + \mu_1 s_1 \mu_3 s_3 \operatorname{tg} s_1 d_1 \cdot d_2 = 0.$$

Für beide Äste wird also dem Werte $v = b_2$ dieselbe Periode T zugeordnet. Da jeder der Äste für sich stetig ist, bleibt die Stetigkeit der ganzen Dispersionskurve auch für den Punkt $v = b_2$ erhalten.

Es ist nun die Frage zu prüfen, ob vielleicht bei der Beziehung zwischen c und T, wobei c die Gruppengeschwindigkeit bedeutet, ein Sprung an der Stelle $v = b_2$ auftritt. Es ist:

$$(4)\qquad c = \frac{v^2}{v + T\dfrac{dv}{dT}}.$$

Es muß also zunächst dv/dT berechnet werden. Dazu werden die Gleichungen (1) und (2) etwas anders geschrieben. Nach Einführung von

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{v^2}{b_1^2} - 1}, \quad \sigma_2 = \sqrt{\frac{v^2}{b_2^2} - 1}, \quad \sigma_2' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{b_2^2}}, \quad \sigma_3 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{b_3^2}}$$

und nach Division durch $4\pi^2/T^2 v^2$ erhält man aus (1) und (2):

$$(1\text{b})\quad F_1(v,T) = -\mu_2^2\sigma_2'^2\,\mathfrak{Tg}\,p_2 d_2 - \mu_2\mu_3\sigma_2'\sigma_3 + \mu_1\mu_2\sigma_1\sigma_2'\operatorname{tg} s_1 d_1 + \mu_1\mu_3\sigma_1\sigma_3\operatorname{tg} s_1 d_1\,\mathfrak{Tg}\,p_2 d_2 = 0$$

$$(2\text{b})\quad F_2(v,T) = \mu_2^2\sigma_2^2\operatorname{tg} s_2 d_2 - \mu_2\mu_3\sigma_2\sigma_3 + \mu_1\mu_2\sigma_1\sigma_2\operatorname{tg} s_1 d_1 + \mu_1\mu_3\sigma_1\sigma_3\operatorname{tg} s_1 d_1\operatorname{tg} s_2 d_2 = 0;$$

es ist nun:

$$\frac{dv}{dT} = -\frac{\dfrac{\partial F_\nu}{\partial T}}{\dfrac{\partial F_\nu}{\partial v}} \qquad (\nu = 1, 2)$$

dv/dT soll jetzt nacheinander für beide Äste berechnet werden. Es ist

$$(5)\quad \frac{\partial F_1}{\partial T} = 2\pi d_2\mu_2^2\frac{\sigma_2'^3}{T^2 v}\frac{1}{\mathfrak{Cof}^2\,p_2 d_2} - 2\pi d_1\mu_1\mu_2\frac{\sigma_1^2\sigma_2'}{T^2 v}\frac{1}{\cos^2 s_1 d_1} - 2\pi d_1\mu_1\mu_3\frac{\sigma_1^2\sigma_3}{T^2 v}\frac{\mathfrak{Tg}\,p_2 d_2}{\cos^2 s_1 d_1} - 2\pi d_2\mu_1\mu_3\frac{\sigma_1\sigma_2'\sigma_3}{T^2 v}\frac{\operatorname{tg} s_1 d_1}{\mathfrak{Cof}^2\,p_2 d_2}.$$

In der Nähe von $v = b_2$ erhält man nach Reihenentwicklung von $\mathfrak{Tg}\,p_2 d_2$ und $\mathfrak{Cof}\,p_2 d_2$ und Vernachlässigung der quadratischen Glieder von p_2 bzw. σ_2'

$$(5\text{a})\quad \frac{\partial F_1}{\partial T} = -\frac{2\pi\sigma_2'}{T^2 v}\left(d_2\mu_1\mu_3\sigma_1\sigma_3\operatorname{tg} s_1 d_1 + d_1\mu_1\mu_2\frac{\sigma_1^2}{\cos^2 s_1 d_1} + 2\pi d_1 d_2\mu_1\mu_3\frac{\sigma_1^2\sigma_3}{T v\cos^2 s_1 d_1}\right)$$

Die Ableitung nach v berechnet sich aus:

$$(6)\quad \begin{aligned}\frac{\partial F_1}{\partial v} = \mathfrak{Tg}\,p_2 d_2\Big(&2\mu_2^2\frac{v}{b_2^2} + \mu_1\mu_3\frac{v}{b_1^2}\frac{\sigma_3}{\sigma_1}\operatorname{tg} s_1 d_1 - \mu_1\mu_3\frac{v}{b_3^2}\frac{\sigma_1}{\sigma_3}\operatorname{tg} s_1 d_1 \\ &+ 2\pi d_1\mu_1\mu_3\frac{\sigma_3}{T v^2\cos^2 s_1 d_1}\Big) + \sigma_2'\Big(\mu_2\mu_3\frac{v}{b_3^2\sigma_3} + \mu_1\mu_2\frac{v}{b_1^2\sigma_1}\operatorname{tg} s_1 d_1 \\ &+ 2\pi d_1\mu_1\mu_2\frac{1}{T v^2\cos^2 s_1 d_1} + 2\pi d_2\mu_2^2\frac{1}{T v^2\,\mathfrak{Cof}^2\,p_2 d_2}\Big) \\ &+ \frac{1}{\sigma_2'}\Big(\mu_2\mu_3\frac{v}{b_2^2}\sigma_3 - \mu_1\mu_2\frac{v}{b_2^2}\sigma_1\operatorname{tg} s_1 d_1 \\ &- 2\pi d_2\mu_1\mu_3\frac{\sigma_1\sigma_3}{T v^2}\frac{\operatorname{tg} s_1 d_1}{\mathfrak{Cof}^2\,p_2 d_2}\Big).\end{aligned}$$

In der Gleichung (6) sollen nun zunächst die Glieder mit $1/\sigma_2'$ gesondert betrachtet werden. Man hat:

$$(7)\quad \frac{1}{\sigma_2'}\left(\mu_2\mu_3\frac{v}{b_2^2}\sigma_3 - \mu_2\mu_1\frac{v}{b_2^2}\sigma_1\operatorname{tg} s_1 d_1 - 2\pi d_2\mu_1\mu_3\frac{\sigma_1\sigma_3}{T v^2}\frac{\operatorname{tg} s_1 d_1}{\mathfrak{Cof}^2\,p_2 d_2}\right).$$

Man könnte denken, daß dieser Term in der Umgebung von $v = b_2$ d. h. $\sigma_2' = 0$ beliebig groß werden kann und somit alle anderen Glieder der Gleichung (6) überwiegt. In Wirklichkeit ist er von derselben Größenordnung wie σ_2'. Man erkennt dies so: Entwickelt man in Gleichung (1b)

$\mathfrak{Tg}\, p_2 d_2$ nach Potenzen von $p_2 d_2$, und vernachlässigt man hierin alle Glieder mit höherer als dritter Potenz in σ_2', so erhält man:

$$(8)\qquad -\mu_2^2 \sigma_2'^2 \cdot p_2 d_2 - \mu_2 \mu_3 \sigma_2' \sigma_3 + \mu_1 \mu_2 \sigma_1 \sigma_2' \operatorname{tg} s_1 d_1 + \mu_1 \mu_3 \sigma_1 \sigma_3 \operatorname{tg} s_1 d_1 \left(p_2 d_2 - \tfrac{1}{3} p_2^3 d_2^3\right) = 0,$$

$$(8\text{a})\qquad \mu_2 \mu_3 \sigma_3 - \mu_1 \mu_2 \sigma_1 \operatorname{tg} s_1 d_1 - \mu_1 \mu_3 \sigma_1 \sigma_3 \operatorname{tg} s_1 d_1 \frac{2\pi d_2}{T v} = -\sigma_2' p_2 d_2 \left(\mu_2^2 + \tfrac{1}{3} \frac{4\pi^2 d_2^2}{T^2 v^2} \cdot \mu_1 \mu_3 \sigma_1 \sigma_3 \operatorname{tg} s_1 d_1\right).$$

$$(8\text{b})\qquad \mu_2 \mu_3 \sigma_3 - \mu_1 \mu_2 \sigma_1 \operatorname{tg} s_1 d_1 - \mu_1 \mu_3 \sigma_1 \sigma_3 \operatorname{tg} s_1 d_1 \frac{2\pi d_2}{T v} = -\frac{2\pi d_2}{T v} \sigma_2'^2 \left(\mu_2^2 + \tfrac{1}{3} \frac{4\pi^2 d_2^2}{T^2 v^2} \cdot \mu_1 \mu_3 \sigma_1 \sigma_3 \operatorname{tg} s_1 d_1\right).$$

Den Ausdruck (7) kann man folgendermaßen umformen:

$$(7\text{a})\qquad \frac{1}{v \sigma_2'} \left(\mu_2 \mu_3 \sigma_3 \frac{v^2}{b_2^2} - \mu_1 \mu_2 \sigma_1 \operatorname{tg} s_1 d_1 \frac{v^2}{b_2^2} - \mu_1 \mu_3 \sigma_1 \sigma_3 \operatorname{tg} s_1 d_1 \frac{2\pi d_2}{T v} \frac{1}{\mathfrak{Cof}^2 p_2 d_2}\right).$$

Wegen $v/b_2^2 = 1 - \sigma_2'^2$ ergibt dies:

$$(7\text{b})\qquad \frac{1}{v \sigma_2'} \left(\mu_2 \mu_3 \sigma_3 - \mu_1 \mu_2 \sigma_1 \operatorname{tg} s_1 d_1 - \mu_1 \mu_3 \sigma_1 \sigma_3 \operatorname{tg} s_1 d_1 \frac{2\pi d_2}{T v} \frac{1}{\mathfrak{Cof}^2 p_2 d_2}\right) - \frac{\sigma_2'}{v} \left(\mu_2 \mu_3 \sigma_3 - \mu_1 \mu_2 \sigma_1 \operatorname{tg} s_1 d_1\right).$$

Mit Benutzung der Gleichung (8b) unter Berücksichtigung der Tatsache, daß für hinreichend kleines $\sigma_2'\, \mathfrak{Cof}^2\, p_2 d_2$ durch 1 ersetzt werden kann:

$$(7\text{c})\qquad -\sigma_2' \left[\frac{2\pi d_2}{T v^2} \left(\mu_2^2 + \tfrac{1}{3} \frac{4\pi^2 d_2^2}{T^2 v^2} \cdot \mu_1 \mu_3 \sigma_1 \sigma_3 \operatorname{tg} s_1 d_1\right) + \frac{1}{v} \left(\mu_2 \mu_3 \sigma_3 - \mu_1 \mu_2 \sigma_1 \operatorname{tg} s_1 d_1\right)\right].$$

Entwickelt man nun in Gleichung (6) die hyperbolischen Funktionen in Reihen nach $p_2 d_2$, vernachlässigt man Glieder höherer als 1. Potenz in σ_2' und ersetzt man den Term (7) durch (7c), so erhält man:

$$(6\text{a})\qquad \frac{\partial F_1}{\partial v} = \sigma_2' \Bigg\{ \frac{2\pi d_2}{T v} \Bigg(2 \mu_2^2 \frac{v}{b_2^2} + \mu_1 \mu_3 \frac{v}{b_1^2} \frac{\sigma_3}{\sigma_1} \operatorname{tg} s_1 d_1 - \mu_1 \mu_3 \frac{v}{b_3^2} \frac{\sigma_1}{\sigma_3} \operatorname{tg} s_1 d_1 + 2\pi d_1 \mu_1 \mu_3 \frac{\sigma_3}{T v^2 \cos^2 s_1 d_1} \Bigg)$$
$$+ \Bigg(\mu_2 \mu_3 \frac{v}{b_3^2 \sigma_3} + \mu_1 \mu_2 \frac{v}{b_1^2 \sigma_1} \operatorname{tg} s_1 d_1 + 2\pi d_1 \mu_1 \mu_2 \frac{1}{T v^2 \cos^2 s_1 d_1} + 2\pi d_2 \mu_2^2 \frac{1}{T v^2 \mathfrak{Cof}^2 p_2 d_2} \Bigg)$$
$$- \Bigg[\frac{2\pi d_2}{T v^2} \left(\mu_2^2 + \tfrac{1}{3} \frac{4\pi^2 d_2^2}{T^2 v^2} \mu_1 \mu_3 \sigma_1 \sigma_3 \operatorname{tg} s_1 d_1 \right) + \frac{1}{v} \left(\mu_2 \mu_3 \sigma_3 - \mu_1 \mu_2 \sigma_1 \operatorname{tg} s_1 d_1 \right) \Bigg] \Bigg\}.$$

Mit denselben Rechnungen und Überlegungen erhält man für den 2. Ast:

$$(9)\qquad \frac{\partial F_2}{\partial T} = -2\pi d_2 \mu_2^2 \frac{\sigma_2^3}{T^2 v} \frac{1}{\cos^2 s_2 d_2} - 2\pi d_1 \mu_1 \mu_2 \frac{\sigma_1^2 \sigma_2}{T^2 v} \frac{1}{\cos^2 s_1 d_1}$$
$$- 2\pi d_1 \mu_1 \mu_3 \frac{\sigma_1^2 \sigma_3}{T^2 v} \frac{\operatorname{tg} s_2 d_2}{\cos^2 s_1 d_1} - 2\pi d_2 \mu_1 \mu_3 \frac{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3}{T^2 v} \frac{\operatorname{tg} s_1 d_1}{\cos^2 s_2 d_2}.$$

Für v hinreichend nahe an b_2:

$$(10)\qquad \frac{\partial F_2}{\partial v} = \sigma_2 \Bigg\{ \frac{2\pi d_2}{T v} \Bigg(2\mu_2^2 \frac{v}{b_2^2} + \mu_1 \mu_3 \frac{v}{b_1^2} \frac{\sigma_3}{\sigma_1} \operatorname{tg} s_1 d_1 - \mu_1 \mu_3 \frac{v}{b_3^2} \frac{\sigma_1}{\sigma_3} \operatorname{tg} s_1 d_1$$
$$+ 2\pi d_1 \mu_1 \mu_3 \frac{\sigma_3}{T v^2 \cos^2 s_1 d_1} \Bigg) + \Bigg(\mu_2 \mu_3 \frac{v}{b_3^2 \sigma_3} + \mu_1 \mu_2 \frac{v}{b_1^2 \sigma_1} \operatorname{tg} s_1 d_1$$
$$+ 2\pi d_1 \mu_1 \mu_2 \frac{1}{T v^2 \cos^2 s_1 d_1} + 2\pi d_2 \mu_2^2 \frac{1}{T v^2 \cos^2 s_2 d_2} \Bigg)$$
$$- \Bigg[\frac{2\pi d_2}{T v^2} \Bigg(\mu_2^2 + \tfrac{1}{3} \frac{4\pi^2 d_2^2}{T^2 v^2} \cdot \mu_1 \mu_3 \sigma_1 \sigma_3 \operatorname{tg} s_1 d_1 \Bigg)$$
$$+ \frac{1}{v} (\mu_2 \mu_3 \sigma_3 - \mu_1 \mu_2 \sigma_1 \operatorname{tg} s_1 d_1) \Bigg] \Bigg\}.$$

Die bisher entwickelten Gleichungen führen zu zwei wichtigen Folgerungen:

1. Für $v = b_2$ stimmt Gleichung (5a) mit Gleichung (9) und Gleichung (6a) mit Gleichung (10) überein, wenn man von den Faktoren σ_2 bzw. σ_2' absieht, die sich bei der Quotientenbildung herausheben. Das bedeutet: Beide Äste der (c, T)-Kurve schließen nach Gleichung (4b) an der Intervallgrenze ohne Sprung aneinander an, da dieses jedenfalls für dv/dT gilt und nach dem Vorhergehenden auch für die (v, T)-Kurve.

2. Für $v \longrightarrow b_2$ streben zwar

$$\frac{\partial F_1}{\partial T}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial v}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial T}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial v}$$

einzeln gegen Null. Dagegen fällt bei den Quotienten

$$\frac{dv}{dT} = -\frac{\frac{\partial F_1}{\partial T}}{\frac{\partial F_1}{\partial v}} \quad \text{und} \quad \frac{dv}{dT} = -\frac{\frac{\partial F_2}{\partial T}}{\frac{\partial F_2}{\partial v}}$$

der gegen 0 gehende Faktor σ_2 bzw. σ_2' in Zähler und Nenner heraus, so daß dv/dT für $v \longrightarrow b_2$ sich (abgesehen von Sonderfällen) einem Werte ungleich Null nähert. Wenn aber im allgemeinen dv/dT nicht mit $v \longrightarrow b_2$ gegen 0 geht, so kann man b_2 nicht nach dem von VON ZUR MÜHLEN[8]) angegebenen Verfahren bestimmen, es sei denn, die (c, T)-Kurve gibt für $v \longrightarrow b_2$ die Bedingung $dc/dT = 0$.

Es erhebt sich nun die Frage, wie verhält sich dc/dT in der Um-

gebung von $v = b_2$. Zuvor soll aber der Vollständigkeit halber das Verhalten der Dispersionskurve für $T \longrightarrow 0$ und $T \longrightarrow \infty$ untersucht werden.

Für sehr kleine Perioden wird $p_2 d_2$ sehr groß, also $\mathfrak{Tg}\, p_2 d_2$ nahezu 1. Dann folgt aus Gleichung (1b)

$$\text{(11)} \qquad \operatorname{tg} s_1 d_1 = \frac{\mu_2 \sigma_2'}{\mu_1 \sigma_1} \frac{\mu_2 \sigma_2' + \mu_3 \sigma_3}{\mu_2 \sigma_2' + \mu_3 \sigma_3} = \frac{\mu_2 \sigma_2'}{\mu_1 \sigma_1}.$$

Diese Näherungsformel, die natürlich nur für sehr kleine T gilt, ist die schon von Love ermittelte Dispersionsformel für ein einfach geschichtetes Medium, dessen obere Schicht die Wellen mit der Geschwindigkeit b_1 leitet, während sie sich im Untergrunde mit der Geschwindigkeit b_2 fortpflanzen. Für $T \longrightarrow 0$ gilt dann, wie es schon Jeffreys[3]) gezeigt hat: $c \longrightarrow v \longrightarrow b_1$. Für sehr große T wird $s_1 d_1$ und $s_2 d_2$ sehr klein. Man kann dann in Gleichung (2b) die Tangenten durch die Bogen ersetzen. Vernachlässigt man nun noch höhere Potenzen der Bogen, so erhält man aus (2b)

$$\text{(12)} \qquad \mu_2^2 \sigma_2^2 \cdot s_2 d_2 - \mu_2 \mu_3 \sigma_2 \sigma_3 + \mu_1 \mu_2 \sigma_1 \sigma_2 \cdot s_1 d_1 = 0$$

$$\text{(12a)} \qquad \frac{2\pi}{T v} (\mu_2 d_2 \sigma_2^2 + \mu_1 d_1 \sigma_1^2) = \mu_3 \sigma_3$$

$$\text{(12b)} \qquad \frac{T v \mu_3 \sigma_3}{2\pi} = \left[\mu_1 d_1 \left(\frac{v^2}{b_1^2} - 1\right) + \mu_2 d_2 \left(\frac{v^2}{b_2^2} - 1\right)\right]$$

$$= (\mu_1 d_1 + \mu_2 d_2) \left[v^2 \frac{\frac{\mu_1 d_1}{b_1^2} + \frac{\mu_2 d_2}{b_2^2}}{\mu_1 d_1 + \mu_2 d_2} - 1 \right].$$

Setzt man nun

$$\mu_1 d_1 + \mu_2 d_2 = \mu d$$

$$\frac{\frac{\mu_1 d_1}{b_1^2} + \frac{\mu_2 d_2}{b_2^2}}{\mu_1 d_1 + \mu_2 d_2} = \frac{1}{b^2}.$$

So erhält man

$$\frac{\mu_3}{2\pi} v \sigma_3 T = \mu d \left(\frac{v^2}{b^2} - 1\right) = \mu d \sigma^2, \qquad \sigma^2 = \left(\frac{v^2}{b^2} - 1\right)$$

$$\text{(12c)} \qquad T = \frac{2\pi \mu d}{\mu_3} \cdot \frac{\sigma^2}{v \sigma_3}$$

bzw.

$$\frac{1}{T} = \frac{\mu_3}{2\pi \mu d} \cdot \frac{v \sigma_3}{\sigma^2}.$$

Daraus folgt für $T \longrightarrow \infty$, $\sigma_3 \longrightarrow 0$; d. h. $v \longrightarrow b_3$

$$\text{(13)} \qquad \frac{dT}{dv} = \frac{2\pi \mu d}{\mu_3} \cdot \frac{d}{dv}\left(\frac{\sigma^2}{v \sigma_3}\right)$$

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{\sigma^2}{v \sigma_3}\right) = \frac{2\sigma \cdot \frac{d\sigma}{dv} \cdot v \sigma_3 - \sigma^2 \left(\sigma_3 + v \frac{d\sigma_3}{dv}\right)}{v^2 \sigma_3^2}$$

$$\frac{d\sigma}{dv} = \frac{d}{dv}\sqrt{\frac{v^2}{b^2} - 1} = \frac{v}{b^2\,\sigma}, \qquad \frac{d\sigma_3}{dv} = \frac{d}{dv}\sqrt{1 - \frac{v^2}{b_3^2}} = -\frac{v}{b_3^2\,\sigma_3}$$

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{\sigma^2}{v\,\sigma_3}\right) = \frac{2\,\frac{v^2}{b^2}\,\sigma_3 - \sigma^2\,\sigma_3 + \frac{v^2}{b_3^2}\cdot\frac{\sigma^2}{\sigma_3}}{v^2\,\sigma_3^2}$$

(13a) $$\frac{dv}{dT} = \frac{1}{\frac{dT}{dv}} = \frac{\mu_3}{2\,\pi\,\mu\,d}\cdot\frac{v^2\,\sigma_3^2}{2\,\frac{v^2}{b^2}\,\sigma_3^2 - \sigma^2\,\sigma_3^2 + \frac{v^2}{b_3^2}\,\sigma^2}.$$

Für $T \longrightarrow \infty$ und $\sigma_3 \longrightarrow 0$ folgt:

$$\frac{dv}{dT} \longrightarrow 0$$

d. h., für $T \longrightarrow \infty$ geht $c \longrightarrow v \longrightarrow b_3$. Das Prinzip dieser Berechnung wurde bereits von JEFFREYS[5]) angegeben.

Zusammenfassend ist also zu sagen, daß für sehr kleine und sehr große Perioden die Dispersionskurve sich einer Parallelen zur T-Achse nähert, wobei die Gruppengeschwindigkeit nahezu gleich der Phasengeschwindigkeit wird. Beide streben gegen den Wert b_1 bzw. b_3. Diese Ergebnisse hat schon VON ZUR MÜHLEN[8]) angegeben, wofür hier nun der Beweis gegeben ist.

Es soll jetzt dc/dT in der Nähe von $v = b_2$ untersucht werden. Aus (4) folgt

(14) $$\frac{dc}{dT} = c\left(\frac{2\,v\,\frac{dv}{dT}}{v^2} - \frac{\frac{dv}{dT} + \frac{dv}{dT} + T\,\frac{d^2v}{dT^2}}{v + T\,\frac{dv}{dT}}\right)$$

oder

(14a) $$\frac{dc}{dT} = \frac{c^2\,T}{v^3}\left[2\left(\frac{dv}{dT}\right)^2 - v\,\frac{d^2v}{dT^2}\right]$$

d^2v/dT^2 muß wieder für beide Kurvenäste berechnet werden.

$$\frac{dv}{dT} = -\frac{\frac{\partial F_\nu}{\partial T}}{\frac{\partial F_\nu}{\partial v}} = -\frac{F_{\nu T}}{F_{\nu v}} \qquad (\nu = 1,\ 2)$$

(14b) $$\frac{d^2v}{dT^2} = -\frac{dv}{dT}\left(\frac{F_{\nu TT}}{F_{\nu T}} - \frac{F_{\nu vT}}{F_{\nu v}}\right) \qquad (\nu = 1,\ 2)$$

Aus (5) ergibt sich:

$$F_{1T} = -\frac{2\,\pi}{T^2\,v}\Big(-d_2\,\mu_2^2\,\frac{\sigma_2'^3}{\mathfrak{Cof}^2\,p_2\,d_2} + d_1\,\mu_1\,\mu_2\,\frac{\sigma_1^2\,\sigma_2'}{\cos^2 s_1\,d_1}$$
$$+ d_1\,\mu_1\,\mu_3\,\frac{\sigma_1^2\,\sigma_3\,\mathfrak{Tg}\,p_2\,d_2}{\cos^2 s_1\,d_1} + d_2\,\mu_1\,\mu_3\,\frac{\sigma_1\,\sigma_2'\,\sigma_3\,\mathrm{tg}\,s_1\,d_1}{\mathfrak{Cof}^2\,p_2\,d_2}\Big),$$

$$F_{1TT} = -\frac{2}{T}F_{1T} + \frac{4\,\pi^2}{T^4\,v^2}\Big[2\,d_2^2\,\mu_2^2\,\sigma_2'^4\,\frac{\mathfrak{Tg}\,p_2\,d_2}{\mathfrak{Cof}^2\,p_2\,d_2}$$
$$+ 2\,d_1^2\,\mu_1\,\mu_2\,\sigma_1^3\,\sigma_2'\,\frac{\mathrm{tg}\,s_1\,d_1}{\cos^2 s_1\,d_1} + d_1\,d_2\,\mu_1\,\mu_3\,\sigma_1^2\,\sigma_2'\,\sigma_3\,\frac{1}{\cos^2 s_1\,d_1\,\mathfrak{Cof}^2\,p_2\,d_2}$$

$$+ 2\, d_1^2\, \mu_1 \mu_3\, \sigma_1^3\, \sigma_3 \frac{\operatorname{tg} s_1 d_1\, \mathfrak{Tg}\, p_2 d_2}{\cos^2 s_1 d_1}$$

$$+ d_1 d_2\, \mu_1 \mu_3\, \sigma_1^2 \sigma_2'\, \sigma_3 \frac{1}{\cos^2 s_1 d_1\, \mathfrak{Cof}^2\, p_2 d_2}$$

$$- 2\, d_2^2\, \mu_1 \mu_3\, \sigma_1 \sigma_2'^2\, \sigma_3 \frac{\operatorname{tg} s_1 d_1\, \mathfrak{Tg}\, p_2 d_2}{\mathfrak{Cof}^2\, p_2 d_2}\Big]$$

$$\frac{F_{1\,TT}}{F_{1\,T}} = -\frac{2}{T} - \frac{4\pi}{T^2 v}\frac{1}{N}\Big[\frac{d_2 \sigma_2'}{\mathfrak{Cof}^2\, p_2 d_2}\Big(d_2\, \mu_2^2\, \sigma_2'^3\, \mathfrak{Tg}\, p_2 d_2$$

$$- d_2\, \mu_1 \mu_3\, \sigma_1 \sigma_2'\, \sigma_3 \operatorname{tg} s_1 d_1\, \mathfrak{Tg}\, p_2 d_2 + d_1\, \mu_1 \mu_3 \frac{\sigma_1^2 \sigma_3}{\cos^2 s_1 d_1}\Big)$$

$$+ \frac{d_1^2\, \mu_1 \sigma_1^3 \operatorname{tg} s_1 d_1}{\cos^2 s_1 d_1}(\mu_2 \sigma_2' + \mu_2 \sigma_3\, \mathfrak{Tg}\, p_2 d_2)\Big]$$

wobei bedeutet:

$$N = \frac{d_2 \sigma_2'}{\mathfrak{Cof}^2\, p_2 d_2}(-\mu_2^2 \sigma_2'^2 + \mu_1 \mu_3 \sigma_1 \sigma_3 \operatorname{tg} s_1 d_1)$$

$$+ \frac{d_1 \mu_1 \sigma_1^2}{\cos^2 s_1 d_1}(\mu_2 \sigma_2' + \mu_3 \sigma_3\, \mathfrak{Tg}\, p_2 d_2).$$

Für v nahe genug an b_2 folgt:

$$(15) \qquad \frac{F_{1\,TT}}{F_{1\,T}} = -\frac{2}{T}$$

$$- \frac{4\pi d_1 \sigma_1}{T^2 v \cos^2 s_1 d_1} \frac{d_2 \mu_3 \sigma_3 + d_1 \mu_2 \sigma_1 \operatorname{tg} s_1 d_1 + 2\pi d_1 d_2 \mu_3 \frac{\sigma_1 \sigma_3 \operatorname{tg} s_1 d_1}{T v}}{d_2 \mu_3 \sigma_3 \operatorname{tg} s_1 d_1 + d_1 \mu_2 \frac{\sigma_1}{\cos^2 s_1 d_1} + 2\pi d_1 d_2 \mu_3 \frac{\sigma_1 \sigma_3}{T v \cos^2 s_1 d_1}}.$$

Ebenso findet man für $F_2(v, T)$ und $v = b_2$

$$(16) \qquad \frac{F_{2\,TT}}{F_{2\,T}} = -\frac{2}{T}$$

$$- \frac{4\pi d_1 \sigma_1}{T^2 v \cos^2 s_1 d_1} \frac{d_2 \mu_3 \sigma_3 + d_1 \mu_2 \sigma_1 \operatorname{tg} s_1 d_1 + 2\pi d_1 d_2 \mu_3 \frac{\sigma_1 \sigma_3 \operatorname{tg} s_1 d_1}{T v}}{d_2 \mu_3 \sigma_3 \operatorname{tg} s_1 d_1 + d_1 \mu_2 \frac{\sigma_1}{\cos^2 s_1 d_1} + 2\pi d_1 d_2 \mu_3 \frac{\sigma_1 \sigma_3}{T v \cos^2 s_1 d_1}}.$$

Aus Gleichung (6) findet man:

$$(17) \quad F_{1\,v\,T} = -\frac{2\pi d_2 \sigma_2'}{T^2 v\, \mathfrak{Cof}^2\, p_2 d_2}\Big(2\, \mu_2^2 \frac{v}{b_2^2} + \mu_1 \mu_3 \frac{v}{b_1^2}\frac{\sigma_3}{\sigma_1} \operatorname{tg} s_1 d_1$$

$$- \mu_1 \mu_3 \frac{v}{b_3^2}\frac{\sigma_1}{\sigma_3} \operatorname{tg} s_1 d_1 + 2\pi d_1 \mu_1 \mu_3 \frac{\sigma_3}{T v^2 \cos^2 s_1 d_1}\Big)$$

$$+ \mathfrak{Tg}\, p_2 d_2 \Big(- \mu_1 \mu_3 \frac{v}{b_1^2}\frac{\sigma_3}{\sigma_1}\frac{2\pi \sigma_1 d_1}{T^2 v \cos^2 s_1 d_1}$$

$$+ \mu_1 \mu_3 \frac{v}{b_3^2}\frac{\sigma_1}{\sigma_3}\frac{2\pi \sigma_1 d_1}{T^2 v \cos^2 s_1 d_1}$$

$$- 4\pi d_1 \mu_1 \mu_3 \frac{\sigma_3 \operatorname{tg} s_1 d_1}{T v^2 \cos^2 s_1 d_1}\frac{2\pi \sigma_1 d_1}{T^2 v} - 2\pi d_1 \mu_1 \mu_3 \frac{\sigma_3}{T^2 v^2 \cos^2 s_1 d_1}\Big)$$

$$
\begin{aligned}
&+ \sigma_2' \Big(- 2\pi d_2 \mu_2^2 \frac{1}{T^2 v^2 \mathfrak{Cof}^2 p_2 d_2} \\
&+ 4\pi d_2 \mu_2^2 \frac{\mathfrak{Tg}\, p_2 d_2}{T v^2 \mathfrak{Cof}^2 p_2 d_2} \frac{2\pi \sigma_2' d_2}{T^2 v} - \mu_1 \mu_2 \frac{v}{b_1^2 \sigma_1} \frac{2\pi \sigma_1 d_1}{T^2 v \cos^2 s_1 d_1} \\
&- 2\pi d_1 \mu_1 \mu_2 \frac{1}{T^2 v^2 \cos^2 s_1 d_1} - 4\pi d_1 \mu_1 \mu_2 \frac{\operatorname{tg} s_1 d_1}{T v^2 \cos^2 s_1 d_1} \frac{2\pi \sigma_1 d_1}{T^2 v} \Big) \\
&+ \frac{1}{\sigma_2'} \Big(\mu_1 \mu_2 \frac{v \sigma_1}{b_2^2} \frac{2\pi \sigma_1 d_1}{T^2 v \cos^2 s_1 d_1} + 2\pi d_2 \mu_1 \mu_3 \frac{\sigma_1 \sigma_3 \operatorname{tg} s_1 d_1}{T^2 v^2 \mathfrak{Cof}^2 p_2 d_2} \\
&+ 2\pi d_2 \mu_1 \mu_3 \frac{\sigma_1 \sigma_3}{T v^2 \mathfrak{Cof}^2 p_2 d_2} \frac{2\pi \sigma_1 d_1}{T^2 v \cos^2 s_1 d_1} \\
&- 4\pi d_2 \mu_1 \mu_3 \frac{\sigma_1 \sigma_3 \operatorname{tg} s_1 d_1}{T v^2 \mathfrak{Cof}^2 p_2 d_2} \mathfrak{Tg}\, p_2 d_2 \frac{2\pi \sigma_2' d_2}{T^2 v} \Big).
\end{aligned}
$$

Entsprechend ergibt sich aus Gleichung (10):

$$
\begin{aligned}
(18) \qquad F_{2vT} = &- \frac{2\pi \sigma_2 d_2}{T^2 v \cos^2 s_2 d_2} \Big(2\mu_2^2 \frac{v}{b_2^2} + \mu_1 \mu_3 \frac{v}{b_1^2} \frac{\sigma_3}{\sigma_1} \operatorname{tg} s_1 d_1 \\
&- \mu_1 \mu_3 \frac{v}{b_3^2} \frac{\sigma_1}{\sigma_3} \operatorname{tg} s_1 d_1 + 2\pi d_1 \mu_1 \mu_3 \frac{\sigma_3}{T v^2 \cos^2 s_1 d_1} \Big) \\
&+ \operatorname{tg} s_2 d_2 \Big(- \mu_1 \mu_3 \frac{v}{b_1^2} \frac{\sigma_3}{\sigma_1} \frac{2\pi \sigma_1 d_1}{T^2 v \cos^2 s_1 d_1} \\
&+ \mu_1 \mu_3 \frac{v}{b_3^2} \frac{\sigma_1}{\sigma_3} \frac{2\pi \sigma_1 d_1}{T^2 v \cos^2 s_1 d_1} \\
&- 4\pi d_1 \mu_1 \mu_3 \frac{\sigma_3 \operatorname{tg} s_1 d_1}{T v^2 \cos^2 s_1 d_1} \frac{2\pi \sigma_1 d_1}{T^2 v} \\
&- 2\pi d_1 \mu_1 \mu_3 \frac{\sigma_3}{T^2 v \cos^2 s_1 d_1} \Big) + \sigma_2 \Big(- \frac{2\pi d_2 \mu_2^2}{T^2 v^2 \cos^2 s_2 d_2} \\
&- 4\pi d_2 \mu_2^2 \frac{\operatorname{tg} s_1 d_1}{T v^2 \cos^2 s_2 d_2} \frac{2\pi \sigma_2 d_2}{T^2 v} - \frac{\mu_1 \mu_2}{b_1^2} \frac{v}{\sigma_1} \frac{2\pi \sigma_1 d_1}{T^2 v \cos^2 s_1 d_1} \\
&- \frac{2\pi d_1 \mu_1 \mu_2}{T^2 v^2 \cos^2 s_1 d_1} - 4\pi d_1 \mu_1 \mu_2 \frac{\operatorname{tg} s_1 d_1}{T v^2 \cos^2 s_1 d_1} \frac{2\pi \sigma_1 d_1}{T^2 v} \Big) \\
&- \frac{1}{\sigma_2} \Big(\frac{\mu_1 \mu_2}{b_2^2} v \sigma_1 \frac{2\pi \sigma_1 d_1}{T^2 v \cos^2 s_1 d_1} + 2\pi d_2 \mu_1 \mu_2 \frac{\sigma_1 \sigma_3 \operatorname{tg} s_1 d_1}{T^2 v^2 \cos^2 s_2 d_2} \\
&+ 2\pi d_2 \mu_1 \mu_3 \frac{\sigma_1 \sigma_3}{T v^2 \cos^2 s_2 d_2} \frac{2\pi \sigma_1 d_1}{T^2 v \cos^2 s_1 d_1} \\
&+ 4\pi d_2 \mu_1 \mu_3 \frac{\sigma_1 \sigma_3 \operatorname{tg} s_1 d_1}{T v^2 \cos^2 s_2 d_2} \operatorname{tg} s_2 d_2 \frac{2\pi \sigma_2 d_2}{T^2 v} \Big).
\end{aligned}
$$

Die Gleichungen (15) bis (18) enthalten ein wichtiges Ergebnis. Für $v \longrightarrow b_2$ werden F_{1v} und F_{2v} Null, wie es schon auf S. 356 gezeigt worden ist. Die drei ersten Terme von F_{1vT} und F_{2vT} werden dann 0, während der letzte Term über alle Grenzen geht, da die Klammer hinter $1/\sigma_2$ bzw. $1/\sigma_2'$ im allgemeinen ungleich Null ist. Im allgemeinen bleiben die Ausdrücke F_{1TT}/F_{1T} und F_{2TT}/F_{2T} endlich. Daher wird

d^2v/dT^2 nach 14b, S. 359 für $v \longrightarrow b_2$ über alle Grenzen gehen. Daraus folgt wieder, daß dc/dT nach (14a) für beide Äste bei Annäherung an den Punkt $v = b_2$ beliebig groß wird; d. h., daß die (c, T)-Kurve an dieser Stelle eine vertikale Tangente hat.

Die mathematische Analyse der Dispersionsgleichung hat also folgendes gezeigt:

1. Die Dispersionskurve für Phasengeschwindigkeit nähert sich für sehr kleine und sehr große Perioden einer Parallelen zur T-Achse. Für $T \longrightarrow 0$ ist $v = b_1$, für $T \longrightarrow \infty$ ist $v = b_3$. Im Punkte $v = b_2$ schließen beide Äste der Kurve stetig aneinander an.

2. Die Kurve für (T, c) nähert sich für sehr kleine und sehr große Perioden der Kurve für Phasengeschwindigkeit. Im Punkte $v = b_2$ schließen beide Äste der Kurve stetig aneinander an. Die Kurve besitzt in diesem Punkte eine vertikale Tangente.

Das Ergebnis der mathematischen Betrachtungen gibt keinesfalls ein klares Bild vom Verlaufe der Dispersionskurven für Phasen- und Gruppengeschwindigkeit. Um dieses zu erhalten, soll nun eine Dispersionskurve mit willkürlich angenommenen Werten von b_1, b_2, b_3, d_1 und d_2 berechnet werden. Die Anwendung der bekannten Näherungsmethoden zur Lösung von Gleichungen führte aber zu äußerst komplizierten Rechnungen. Reihenentwicklungen waren auch nicht vorteilhafter. Daher wurde folgende Überlegung angestellt: In der Gleichung für ein einfach geschichtetes Medium

$$\operatorname{tg} s_1 d_1 = \frac{\mu_2 \sigma_2}{\mu_1 \sigma_1}$$

ist die rechte Seite von T unabhängig. Für jedes v kann dann zunächst $\operatorname{tg} s_1 d_1$ und daraus schließlich T berechnet werden, wie es JEFFREYS[3]) gezeigt hat. Bei den Gleichungen (1) und (2) versagt dieses einfache Verfahren, weil T in zwei verschiedenen transzendenten Funktionen auftritt. Es soll also versucht werden, diese Gleichung so umzuformen, daß in ihr nur eine Funktion, deren Argument T enthält, vorkommt, während alle anderen Größen nur von v abhängen. Das ist möglich, wenn man darauf verzichtet, daß diese Funktion von elementarem Typus ist. Man kann sie als ein leicht auszuwertendes Integral erhalten. Es soll bezeichnen:

$$\mu_1 \sigma_1 = a, \quad \mu_2 \sigma_2' = b, \quad \mu_3 \sigma_3 = c$$

$$\mathfrak{Tg}\, p_2 d_2 = x, \quad \operatorname{tg} s_1 d_1 = y.$$

Dann ist:

$$y = \frac{b}{a}\frac{b\,x + c}{c\,x + b},$$

$$p_2 d_2 = \frac{2\,\pi\,\sigma_2'\,d_2}{T\,v} = \mathfrak{Ar}\,\mathrm{tg}\,x,$$

$$s_1\,d_1 = \frac{2\,\pi\,\sigma_1\,d_1}{T\,v} = \mathrm{arc\,tg}\,y$$

$$\frac{2\,\pi}{T\,v} = \frac{\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,x}{\sigma_2'\,d_2} = \frac{\mathrm{arc\,tg}\;y}{\sigma_1\,d_1},$$

$$\frac{1}{\sigma_2'\,d_2}\int_0^x \frac{d\,t}{1-t^2} = \frac{1}{\sigma_1\,d_1}\int_0^y \frac{d\,t}{1+t^2},$$

$$\sigma_2'\,d_2 \int_0^{\frac{b}{a}\frac{b\,x+c}{c\,x+b}} \frac{d\,t}{1+t^2} - \sigma_1\,d_1 \int_0^x \frac{d\,t}{1-t^2} = 0.$$

Durch die Transformation:

$$\frac{b}{a}\cdot\frac{b\,\tau + c}{c\,\tau + b} = t, \qquad \frac{d\,t}{d\,\tau} = \frac{b}{a}\,\frac{b^2 - c^2}{(c\,\tau + b)^2},$$

$$\mathfrak{J} = \int_0^{\frac{b}{a}\frac{b\,x+c}{c\,x+b}} \frac{d\,t}{1+t^2} = \int_{-c/b}^{x} \frac{a\,b\,(b^2 - c^2)\,d\,\tau}{(a^2\,c^2 + b^4)\,\tau^2 + 2\,b\,c\,(a^2 + b^2)\,\tau + b^2\,(a^2 + c^2)}$$

$$= \int_{-c/b}^{x} R\,(\tau)\,d\,\tau = \int_{-c/b}^{0} R\,(\tau)\,d\,\tau + \int_0^x R\,(\tau)\,d\,\tau,$$

$$\mathfrak{J} = \int_0^x R\,(t)\,d\,t + \int_0^{c/a} \frac{d\,t}{1+t^2} = \int_0^x R\,(t)\,d\,t + \mathrm{arc\,tg}\,c/a.$$

Für $\tau = -\frac{c}{b}$ ist $t = 0$, $\tau = 0$ ist $t = \frac{c}{a}$.

$$\int_0^x \left[\frac{d_2\,\sigma_2'}{d_1\,\sigma_1}\,R\,(t) - \frac{1}{1-t^2}\right] d\,t = -\frac{d_2\,\sigma_2'}{d_1\,\sigma_1}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{\mu_3\,\sigma_3}{\mu_1\,\sigma_1}. \tag{19}$$

Für äquidistante v werden nun die Koeffizienten im Integranden und

$$-\frac{d_2\,\sigma_2'}{d_1\,\sigma_1}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{\mu_3\,\sigma_3}{\mu_1\,\sigma_1} = F$$

berechnet. Da $0 \leqq x \leqq 1$ sein muß, so wird der Integrand für jedes v von $t = 0.0;\ 0.1;\ 0.2;\ \ldots;\ 1.0$ berechnet. Mit Hilfe der Trapezformel kann man dann sehr schnell die Zehntel ermitteln, zwischen denen x liegen muß. Es seien α und α' die so gefundenen Zehntel und M ein

Mittelwert des Integranden zwischen $t = \alpha$ und $t = \alpha'$. Dann ist nach dem einfachen Mittelwertsatz der Integralrechnung:

$$\int_0^a \left[\frac{d_2\,\sigma_2'}{d_1\,\sigma_1} R(\mathrm{t}) - \frac{1}{1-t^2}\right] d\,t + (x-\alpha)\,M = -\frac{d_2\,\sigma_2'}{d_1\,\sigma_1} \operatorname{arc\,tg} c/a\,,$$

$$x = \alpha + \frac{1}{M}\left\{-\frac{d_2\,\sigma_2'}{d_1\,\sigma_1} \operatorname{arc\,tg} c/a - \int_0^a \left[\frac{d_2\,\sigma_2'}{d_1\,\sigma_1} R(t) - \frac{1}{1-t^2}\right] d\,t\right\},$$

Durch die Transformation

$$t = b\,\frac{a\,\tau - c}{b^2 - a\,c\,\tau}$$

erhält man:

$$\int_0^a \left[\frac{d_2\,\sigma_2'}{d_1\,\sigma_1} R(t) - \frac{1}{1-t^2}\right] d\,t = \frac{d_2\,\sigma_2'}{d_1\,\sigma_1} \int_{c/b}^{\frac{b}{a}\,\frac{b\,a+c}{c\,a+b}} \frac{d\,\tau}{1+\tau^2} - \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,\alpha$$

$$= -\frac{d_2\,\sigma_2'}{d_1\,\sigma_1} \operatorname{arc\,tg} \frac{\mu_3\,\sigma_3}{\mu_1\,\sigma_1} + \frac{d_2\,\sigma_2'}{d_1\,\sigma_1} \operatorname{arc\,tg} \frac{\mu_2\,\sigma_2'}{\mu_1\,\sigma_1}\,\frac{\mu_2\,\sigma_2'\,\alpha + \mu_3\,\sigma_3}{\mu_3\,\sigma_3\,\alpha + \mu_2\,\sigma_2'} - \mathfrak{Ar}\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

$$x = \alpha + \frac{1}{M}\left[1{,}151^{10} \log \frac{1+\alpha}{1-\alpha} - \frac{d_2\,\sigma_2'}{d_1\,\sigma_1} \operatorname{arc\,tg} \frac{\mu_2\,\sigma_2'}{\mu_1\,\sigma_1}\,\frac{\mu_2\,\sigma_2'\,\alpha + \mu_3\,\sigma_3}{\mu_3\,\sigma_3\,\alpha + \mu_2\,\sigma_2'}\right]. \tag{20}$$

Aus x ergibt sich dann T durch:

$$T = \frac{2\,\pi\,d_2\,\sigma_2'}{1{,}151 \cdot v^{10} \log \frac{1+x}{1-x}}. \tag{21}$$

Der Fehler bei dieser Berechnung von x ist kleiner als

$$\left|\frac{\Delta\,M}{M}(x-\alpha)\right|,$$

wobei $\Delta\,M$ die Schwankung des Integranden im Intervall von α bis α' bedeutet.

Bei der Berechnung einer Dispersionskurve nach dieser dargelegten Methode, die kompliziert aussieht, in der Durchführung aber wesentlich vorteilhafter war als zum Beispiel die Anwendung der „regula falsi", erwies es sich, daß der Fehler bei x meistens so klein war, daß das Verfahren nicht wiederholt werden mußte.

Für den zweiten Ast der Kurve kann man natürlich dasselbe Verfahren nach einigen Änderungen anwenden.

$$\mu_1\,\sigma_1 = a\,, \qquad \mu_2\,\sigma_2 = b\,, \qquad \mu_3\,\sigma_3 = c\,, \qquad \mathrm{tg}\,s_1\,d_1 = x\,, \qquad \mathrm{tg}\,s_2\,d_2 = y\,,$$

$$\int_0^x \left(\frac{d_1}{d_2}\,\mu_1\,\mu_2\,\sigma_1^2\,\frac{1}{b^2 + a^2\,t^2} + \frac{1}{1+t^2}\right) d\,t = \frac{d_1\,\sigma_1}{d_2\,\sigma_2} \operatorname{arc\,tg} c/b\,, \tag{22}$$

$$x = \alpha + \frac{1}{M}\left(-\operatorname{arc\,tg}\alpha + \frac{d_1\,\sigma_1}{d_2\,\sigma_2}\operatorname{arc\,tg} b\,\frac{c - a\,\alpha}{b^2 + a\,c\,\alpha}\right), \tag{23}$$

$$T = \frac{2\,\pi\,d_1\,\sigma_1}{v \operatorname{arc\,tg} x}. \tag{24}$$

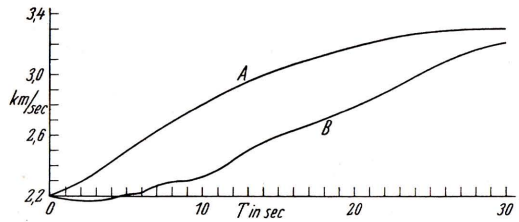

Fig. 2. Theoretische Dispersionskurven. A für Phasen- und B für Gruppengeschwindigkeit.

Fig. 2 gibt theoretische Dispersionskurven für Phasen- und Gruppengeschwindigkeit. Dabei waren die Annahmen ganz willkürlich gewählt zu

$b_1 = 2.20$ km/sec,	$d_1 = 3$ km,
$b_2 = 2.62$ km/sec,	$d_2 = 6$ km.
$b_3 = 3.40$ km/sec,	

b) Die Berechnung der Schichtdicken.

Betrachtet man Fig. 2, im Vergleich zu Fig. 1, so kann man nicht im Zweifel sein, daß die aus den Messungen an den Seismogrammen berechneten Geschwindigkeiten Gruppengeschwindigkeiten sind. Die

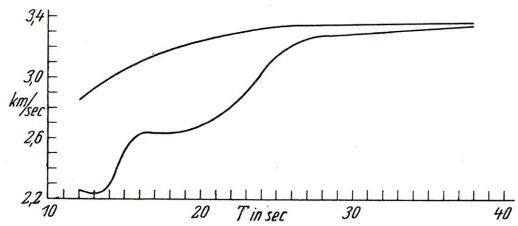

Fig. 3. Beobachtete (v-T)-Kurve (vgl. Fig. 1) und Ergebnis der Integration (Phasengeschwindigkeit).

Dispersionskurve für Phasengeschwindigkeit hat ja einen ganz wesentlich anderen Verlauf, als die gemessene Kurve.

Um nun die Schichtdicken aus den Messungen zu bestimmen, muß man zunächst die Geschwindigkeiten b_1, b_2, b_3 ermitteln. Für die großen Perioden scheint sich die Kurve (s. Fig. 1) schon stark der Parallelen zur T-Achse zu nähern. Es wurde der Kurve für b_3 der Wert

3.36 km/sec entnommen. Bei den kleinen Perioden liegen die Verhältnisse etwas ungünstiger. Doch kann man mit einiger Berechtigung $b_1 = 2.26$ km/sec annehmen. Außerdem geht aus der Kurve noch hervor, daß der Geschwindigkeit $v = b_2$ die Periode 14.7 sec zugeordnet ist; denn nach S. 361 tritt die vertikale Tangente an die Gruppengeschwindigkeitskurve bei $v = b_2$ auf. Die Geschwindigkeit b_2 kann man der gemessenen Kurve nicht entnehmen. Dazu braucht man die (v, T)-Kurve. Aus Gleichung (4) folgt:

$$\frac{d\,v}{d\,T} + \frac{v}{T} - \frac{v^2}{c\,T} = 0\,.$$

Wenn man durch die gemessenen Punkte eine glatte Kurve hindurchlegt, kann man diese Differentialgleichung nach dem RUNGE-KUTTAschen Verfahren numerisch integrieren. Die Integration ist natürlich von den Anfangsbedingungen abhängig. Bei der Bestimmung dieser Anfangsbedingungen macht man von der Tatsache Gebrauch, daß für große Perioden c nur wenig von v verschieden ist. Tab. 2 zeigt $v(T)$

Tabelle 2.

Periode (T), beobachtete Gruppengeschwindigkeit (c) nach Fig. 1 und durch Integration gewonnene Phasengeschwindigkeiten (v_1, v_2, v_3) für verschiedene Anfangsbedingungen.

T	c	v_1	v_2	v_3
38	3.34	3.36	3.35	3.34
36	3.33	3.36	3.35	3.34
34	3.32	3.36	3.35	3.34
32	3.30	3.35	3.35	3.34
30	3.28	3.35	3.35	3.34
28	3.26	3.34	3.34	3.34
26	3.21	3.34	3.34	3.34
25	3.14	3.33	3.33	3.33
24	3.02	3.32	3.32	3.32
23	2.90	3.30	3.31	3.30
22	2.82	3.28	3.29	3.28
21	2.74	3.25	3.27	3.26
20	2.68	3.22	3.24	3.23
19	2.65	3.19	3.20	3.19
18	2.64	3.15	3.16	3.16
17	2.64	3.12	3.13	3.13
16	2.62	3.09	3.09	3.09
15	2.50	3.05	3.05	3.05
14	2.28	2.99	2.99	2.99
13	2.23	2.92	2.92	2.92
12	2.25	2.86	2.86	2.86

nach verschiedenen Anfangsbedingungen. Die Unterschiede sind gering. Es wurde nun $T = 38$ sec und $v = 3.36$ km/sec als Anfangsbedingungen eingeführt. Fig. 3 zeigt die so erhaltene mittlere Kurve. Zu $T = 14.7$ sec gehört danach $v = 3.03$ km/sec. Diese Geschwindigkeit ist also als die Geschwindigkeit b_2 aufzufassen.

Für die Dichten wurden dem Gutenbergschen Handbuch der Geophysik II, 1, S. 464, Tab. 47 die Werte $\varrho_1 = 2.8$; $\varrho_2 = 2.9$; $\varrho_3 = 3.2$ entnommen. Wegen $0 < \mathfrak{Tg}\, p_2 d_2 < 1$ liefert der erste Ast der Kurve gleich eine Abschätzung für d_1. Es ist nämlich

$$\mathfrak{Tg}\, p_2 d_2 = \frac{\mu_2 \sigma_2' (\mu_3 \sigma_3 - \mu_1 \sigma_1 \operatorname{tg} s_1 d_1)}{\mu_1 \sigma_1 \mu_3 \sigma_3 \operatorname{tg} s_1 d_1 - \mu_2^2 \sigma_2'^2}.$$

Das liefert:

$$0 < \frac{\mu_2 \sigma_2' (\mu_3 \sigma_3 - \mu_1 \sigma_1 \operatorname{tg} s_1 d_1)}{\mu_1 \sigma_1 \mu_3 \sigma_3 \operatorname{tg} s_1 d_1 - \mu_2^2 \sigma_2'^2}$$

$$\mu_3 \sigma_3 - \mu_1 \sigma_1 \operatorname{tg} s_1 d_1 > 0,$$

$$\operatorname{tg} s_1 d_1 < \frac{\mu_3 \sigma_3}{\mu_1 \sigma_1},$$

$$1 > \frac{\mu_2 \sigma_2' (\mu_3 \sigma_3 - \mu_1 \sigma_1 \operatorname{tg} s_1 d_1)}{\mu_1 \sigma_1 \mu_3 \sigma_3 \operatorname{tg} s_1 d_1 - \mu_2^2 \sigma_2'^2},$$

$$\mu_1 \sigma_1 \mu_3 \sigma_3 \operatorname{tg} s_1 d_1 - \mu_2^2 \sigma_2'^2 \cdot > \cdot \mu_2 \sigma_2' (\mu_3 \sigma_3 - \mu_1 \sigma_1 \operatorname{tg} s_1 d_1),$$

$$\operatorname{tg} s_1 d_1 > \frac{\mu_2 \sigma_2'}{\mu_1 \sigma_1}.$$

Voraussetzung dabei ist, daß der Nenner positiv ist. Das ist auch der Fall. Man kann es indirekt beweisen:

$$\mu_1 \sigma_1 \mu_3 \sigma_3 \operatorname{tg} s_1 d_1 - \mu_2^2 \sigma_2'^2 < 0. \text{ Dann ist auch:}$$

$$\mu_3 \sigma_3 - \mu_1 \sigma_1 \operatorname{tg} s_1 d_1 < 0,$$

$$\frac{\mu_3 \sigma_3}{\mu_1 \sigma_1} < \operatorname{tg} s_1 d_1 < \frac{\mu_2^2 \sigma_2'^2}{\mu_1 \sigma_1 \mu_3 \sigma_3}.$$

$$\mu_3^2 \sigma_3^2 < \mu_2^2 \sigma_2'^2, \qquad \text{unmöglich für } v < b_2.$$

Setzt man nun für verschiedene $v < b_2$

$$\operatorname{tg} s_1 d_1 = \frac{\mu_3 \sigma_3}{\mu_1 \sigma_1} \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{tg} s_1 d_1 = \frac{\mu_2 \sigma_2'}{\mu_1 \sigma_1}$$

so erhält man daraus eine Reihe von Maximal- bzw. Minimalwerten von d_1.

Wegen der Mehrdeutigkeit des Tangens gibt es verschiedene Möglichkeiten. Plausibel sind nur die in Tab. 3 und 4 wiedergegebenen.

Tabelle 3.
Abschätzung der Schichtdicke d_1 (in km).

v	2.86	2.92	2.99
d_1 max.	7.18	7.03	6.82
d_1 min.	4.64	3.96	2.52

Tabelle 4.
Abschätzung der Schichtdicke d_1 (in km).

v	2.86	2.92	2.98
d_1 max.	29.5	30.5	31.4
d_1 min.	26.9	27.2	26.8

Die Werte aus Tab. 3 befriedigen nicht die Gleichung (2). Also liegt d_1 zwischen 27.2 km und 29.5 km. Nimmt man nun einen Wert d_1 an, kann man d_2 durch

$$\mathfrak{Tg}\, p_2\, d_2 = \frac{\mu_2\, \sigma_2'\, (\mu_3\, \sigma_3 - \mu_1\, \sigma_1\, \mathrm{tg}\, s_1\, d_1)}{\mu_1\, \sigma_1\, \mu_3\, \sigma_3\, \mathrm{tg}\, s_1\, d_1 - \mu_2^2\, \sigma_2'^2} \tag{25}$$

berechnen. Durch Probieren wurde nun der Wert d_1 ermittelt, bei dem die geringste Streuung in d_2 auftrat. Es war der Wert 27.2 km.

Nun werden aus den Dispersionsgleichungen für $d_1 = 27.2$ km die Werte von $\mathfrak{Tg}\, p_2 d_2$ bzw. $\mathrm{tg}\, s_2 d_2$ für eine Reihe von v, T-Paaren nach Gleichung (25) und der entsprechenden für $\mathrm{tg}\, s_2 d_2$ berechnet. Aus dieser Reihe wurde d_2 so bestimmt, daß die mit diesem d_2 berechneten Reihen $\mathfrak{Tg}\, \overline{p_2\, d_2}$, $\mathrm{tg}\, \overline{s_2\, d_2}$ die beste Übereinstimmung im Sinne der Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate mit der vorher berechneten Reihe $\mathfrak{Tg}\, p_2\, d_2$, $\mathrm{tg}\, s_2\, d_2$ hatten. Das Ergebnis war $d_2 = 40.24$ km. Zur Probe wurden nun mit diesem Werte von d_2 nach derselben Methode d_1 bestimmt. Es ergab sich $d_1 = 27.21$ km. Man kann also mit den gemessenen Werten dann am besten die Dispersionsgleichungen befriedigen, wenn man $d_1 = 27.2$ km und $d_2 = 40.2$ km setzt.

Mit diesen Werten wurde nun die Dispersionskurve berechnet. Das Ergebnis ist in Fig. 4 wiedergegeben worden. Die berechnete Kurve steht in guter Übereinstimmung mit den gemessenen Werten. Die Tiefe der ersten Schicht ist von Lupp nach einer anderen Methode zu 29.4 km berechnet worden. Das stimmt mit dem hier ermittelten Werte ganz gut zusammen. Für die Tiefenlage der zweiten Diskontinuität kommt aber Lupp zu dem (gegenüber $27.2 + 40.2 = 67.4$ km) wesentlich geringeren Wert 47.8 km. Das liegt wohl daran, daß Lupp mit anderen Geschwindigkeitsannahmen gerechnet hat. Betrachtet man die letzte Spalte von Tab. 1, so kann man allerdings nicht behaupten, daß die hier zugrunde gelegte Geschwindigkeitsverteilung viel mehr Vertrauen

verdient, als die Annahme LUPPS. Es liegt dies natürlich daran, daß die genaue Messung großer Perioden mit den gewöhnlichen Stationsinstrumenten gar nicht möglich ist, was den Wert der Methode natürlich sehr beeinträchtigt. Namentlich zur Berechnung von d_2 eignet sich diese Methode nicht, da nur eine kleine Veränderung der Dispersionskurve eine erhebliche Änderung von d_2 nach sich zieht. Daher überrascht es auch nicht, daß $d_2 = 40.2$ km offenbar zu groß ist, obwohl

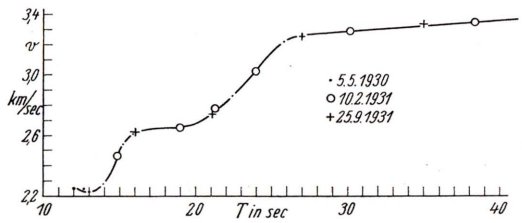

Fig. 4. Theoretisch abgeleitete Dispersionskurve für $d_1 = 27.2$ km und $d_2 = 40.2$ km im Vergleich zu den direkt gemessenen Werten (vgl. Fig. 1).

Fig. 4 eine ganz gute Übereinstimmung von berechneten und gemessenen Kurven zeigt.

Diese Arbeit ist von Herrn Regierungsrat Professor Dr. ERRULAT noch während seiner Königsberger Tätigkeit angeregt worden. Ich bin ihm für viele Ratschläge und kritische Bemerkungen während der Abfassung der Arbeit zu größtem Dank verpflichtet.

Literatur.

1. GUTENBERG, Physik. Z. **1925**, S. 277.
2. STONELEY, Mthly Not. Roy. Astron. Soc., Geophys., Suppl. **1**, S. 280.
3. JEFFREYS, Mthly Not. Roy. Astron. Soc., Geophys. Suppl. **1**, S. 282.
4. STONELEY-TILLOTSON, Mthly Not. Roy. Astron. Soc., Geophys. Suppl. **1**, S. 521.
5. JEFFREYS, Mthly Not. Roy. Astron. Soc., Geophys. Suppl. **2**, S. 101.
6. ROHRBACH, Z. Geophys. **8** (1932) 113.
7. VON ZUR MÜHLEN, Z. Geophys. **10** (1934) 26.
8. — Z. Dtsch. geol. Ges. **88** (1936) 341.
9. LUPP, Mitt. Geophys. Warte Groß-Raum **18** (1932).

Printed in Germany.

Lebenslauf.

Am 15. Juni 1910 bin ich in Wehlau als Sohn des Ingenieurs Julius Menzel und seiner Ehefrau Hedwig Menzel geb. Krüger geboren worden. Meine Schulbildung erhielt ich auf der Oberrealschule in Wehlau, an der ich im April 1929 die Reifeprüfung ablegte. Danach studierte ich an der Albertus-Universität in Königsberg Mathematik, Physik und Chemie. Mein Studium beendete ich mit dem Mittelschullehrerexamen. Während meiner Unterrichtstätigkeit an einer Königsberger Mittelschule belegte ich als Gasthörer Vorlesungen aus den Gebieten der Geophysik, der Physik, der Mathematik, der Astronomie und der Geologie. Im April 1935 schied ich aus dem Schuldienste aus. Vom 15. Nov. 1936 bis zum 31. Okt. 1938 war ich Hilfsassistent an der geophysikalischen Warte der Albertus-Universität in Königsberg. In dieser Zeit fertigte ich eine Dissertation über seismische Oberflächenwellen an, zu der ich von Herrn Prof. Errulat angeregt worden war.