Überreicht von der
PRAKLA
Gesellschaft für praktische
Lagerstättenforschung G. m. b. H.

PRINZIPIELLE BEMERKUNGEN ZU THEORIE UND PRAXIS DER METHODE DER ZWEITEN ABLEITUNG BEI DER INTERPRETATION GRAVIMETRISCHER MESSERGEBNISSE

VON

OTTO ROSENBACH

Reprint from:

GEOPHYSICAL PROSPECTING, Volume V (1957), No. 2

PRINZIPIELLE BEMERKUNGEN ZU THEORIE UND PRAXIS DER METHODE DER ZWEITEN ABLEITUNG BEI DER INTERPRETATION GRAVIMETRISCHER MESSERGEBNISSE

VON

OTTO ROSENBACH *)

ABSTRACT

The first part of the paper deals with theoretical considerations concerning the arithmetic mean of gravity values and its use with regard to the derivation of approximation formulae for the second derivative. In order to calculate the second derivative in practice the arithmetic mean $\bar{g}(r)$ of a continuum of gravity values on a circle of radius r is approximated by a Taylor polynomial and then replaced by the arithmetic mean $\dot{g}_n(r)$ of n discrete gravity values. Because of the invariance of $\bar{g}(r)$ with regard to rotations of the coordinate system in the horizontal datum plane there exists a lower limit for the number n; this lower limit depends on the degree of the Taylor polynomial used in the formula for g_{zz}.

The general results of the first part yield routine formulae for the special case of a regular hexagonal grid; these formulae are given and discussed in the second part of the paper. Three formulae are applied to the gravity data of the Los Angeles Basin. Some remarks concerning the comparability of different approximation formulae and some hints with regard to routine calculations conclude the paper.

ZUSAMMENFASSUNG:

Im ersten Teil der Arbeit werden einige theoretische Überlegungen in bezug auf die Verwendung des arithmetischen Mittels von Schwerewerten zur Herleitung von Näherungsformeln für die zweite Ableitung angestellt. Für die praktische Berechnung der zweiten Ableitung g_{zz} wird das arithmetische Mittel $\bar{g}(r)$ eines Kontinuums von Schwerewerten auf einem Kreis vom Radius r um den Aufpunkt durch ein Taylor-Polynom approximiert und dem arithmetischen Mittel $\dot{g}_n(r)$ von n diskreten Schwerewerten gleichgesetzt. Auf Grund der Invarianz von $\bar{g}(r)$ gegenüber Drehungen des Koordinatensystems in der horizontalen Bezugsebene ergibt sich für die Zahl n eine Limitierung nach unten, und zwar in Abhängigkeit von der Ordnung des Taylor-Polynoms, das die Grundlage zur Herleitung einer Formel für g_{zz} bildet.

Die allgemeinen Formeln des ersten Teils liefern durch Spezialisierung die Gebrauchsformeln für ein regelmässiges Sechseckgitter, die im zweiten Teil

*) Institut für Meteorologie und Geophysik der Universität Mainz; Mitarbeiter der *Prakla*, Gesellschaft für praktische Lagerstättenforschung GmbH, Hannover.

angegeben und diskutiert werden. Es erfolgt eine Anwendung von drei Formeln auf das Messgebiet des Los Angeles Basin. Überlegungen hinsichtlich der Vergleichbarkeit verschiedener Näherungsformeln für die zweite Ableitung und einige Hinweise zur routinemässigen Bearbeitung praktischer Messergebnisse bilden den Abschluss der Arbeit.

INHALT

1. Einleitung.
2. Die Verwendung des arithmetischen Mittels zur Herleitung von Näherungsformeln für die 2. Ableitung.
   2.1 Das Taylor-Polynom für $\bar{g}(r)$.
   2.2 Approximation von $\bar{g}(r)$ durch $\dot{g}_n(r)$.
   2.3 Die Minimalzahl der Summanden von $\dot{g}_n(r)$.
   2.4 Näherungsformeln für die 2. Ableitung.
3. Die Anwendung von Näherungsformeln für die 2. Ableitung bei der Bearbeitung praktischer Messergebnisse.
   3.1 Gebrauchsformeln für ein regelmässiges Sechseck-Gitter.
   3.2 Ein Beispiel: Das Los Angeles Basin.
   3.3 Über die Vergleichbarkeit verschiedener Näherungsformeln für die 2. Ableitung.
   3.4 Einige Hinweise zur routinemässigen Bearbeitung praktischer Messergebnisse.

1. *Einleitung*

Die Berechnung der 2. Ableitung der Störschwere nach der Vertikalrichtung bildet heute vielfach ein Standardverfahren bei der Auswertung gravimetrischer Messergebnisse. Es sind mehrere, ihrer Konzeption nach unterschiedliche Methoden für die Herleitung von Formeln zur Berechnung der 2. Ableitung aus den Bouguer-Anomalien publiziert worden. In jedem Falle handelt es sich um *Näherungs*formeln, die je nach Wahl der auftretenden Parameter für die Interpretation verschieden brauchbar sind.

Bei einigen Methoden gründet sich die Herleitung von Formeln für die 2. Ableitung auf die Darstellung des Anomalienfeldes in der Nachbarschaft des Aufpunktes durch ein Taylor-Polynom. In bezug auf diese Methoden sollen im folgenden einige prinzipielle Gesichtspunkte diskutiert werden, deren Bedeutung für die anderen gebräuchlichen Methoden durch sinngemässe Übertragung der entsprechenden Fragestellungen geprüft werden könnte.

2. *Die Verwendung des arithmetischen Mittels zur Herleitung von Näherungsformeln für die 2. Ableitung.*

2.1 Das Taylor-Polynom für das arithmetische Mittel $\bar{g}(r)$.

Bezeichnet $g\,(x, y, o)$ die Bouguer-Anomalie in der horizontalen Bezugsebene von Fig. 1, dann ist das arithmetische Mittel $\bar{g}\,(r)$ der Funktion g auf einem Kreis vom Radius r um den Punkt P, mit Verwendung von $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, gegeben durch

$$g(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ o)\, d\varphi. \tag{1}$$

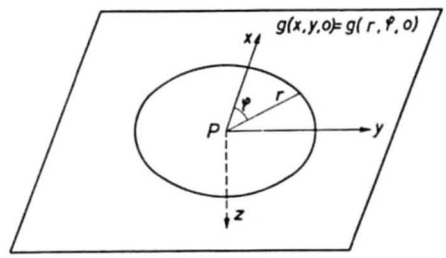

Fig. 1: Horizontale Bezugsebene für die Bouguer-Anomalien g und Koordinatenbezeichnung
Horizontal datum plane for the Bouguer anomaly g and notation of coordinates

Das arithmetische Mittel ist eine Funktion von r, die durch ein Taylor-Polynom

$$g(r) \approx g^{\mathrm{P}} + a_2 r^2 + a_4 r^4 + \ldots + a_{2\mathrm{M}}\, r^{2\mathrm{M}}, \tag{2}$$

mit

$$a_{2\mu} = \frac{1}{(2\mu)!}\left(\frac{d^{2\mu}\,\bar{g}(r)}{dr^{2\mu}}\right)^P,\ \mu = 1, 2, \ldots, M \tag{2a}$$

approximiert werden kann; die Koeffizienten der ungeraden Potenzen von r verschwinden.

Der Koeffizient des quadratischen Gliedes in (2) ist

$$a_2 = -\frac{1}{4}\, g_{zz}^P, \tag{3}$$

wobei g_{zz}^P die 2. Ableitung der Bouguer-Anomalie nach der Vertikalrichtung bedeutet, die im folgenden kurz als „2. Ableitung" bezeichnet wird. — Eine Herleitung von (3) findet sich z.B. bei Elkins (1951); in Abweichung hiervon ist der Ausdruck (3) auch sehr leicht herzuleiten, indem man den Differentialquotienten in (2a) für $\mu = 1$ durch zweimalige Differentiation von (1) unter dem Integralzeichen berechnet und berücksichtigt, dass die Bouguer-Anomalie der Differentialgleichung von Laplace genügt.

Das Polynom (2) dient nun zur Berechnung der gesuchten 2. Ableitung g_{zz}^P aus dem Anomalienfeld g. Entnimmt man diesem für eine Anzahl k verschiedener Radien r_j, $j = 1, 2, \ldots, k$, die zugehörigen arithmetischen Mittel $\bar{g}(r_j)$, so entstehen k lineare Gleichungen, aus denen die Unbekannte g_{zz}^P zu errechnen ist. Das Gleichungssystem ist lösbar, wenn k hinreichend gross ist, wofür sowohl der Grad des Näherungspolynoms als auch weitere Gesichtspunkte massgebend sind, auf die in Abschnitt 2.4 eingegangen wird. — Hier soll vor-

erst die Technik der Entnahme von $\bar{g}(r)$ aus dem Anomalienfeld g in der Praxis einer Betrachtung unterzogen werden. [1])

2.2 Approximation von $\bar{g}(r)$ durch $\dot{g}_n(r)$.

In der Praxis wird das Anomalienfeld g aus Gravimetermessungen an diskreten, genügend eng gewählten Stationen erhalten, indem die Linien gleicher Anomalie, die sogen. Isogammen möglichst genau gezeichnet werden. Die Bestimmung des Wertes $\bar{g}(r)$ erfolgt nun nicht durch tatsächliche Ausführung der Integration gemäss (1), sondern vermittels einer Approximation des Integrals durch eine Summe, und zwar gewöhnlich in folgender Weise: Man teile den Vollwinkel um P in n gleiche Teile $\Delta\varphi_i = 2\pi/n$; sodann wähle man auf dem zu $\Delta\varphi_i$ gehörigen Bogenstück des Kreises mit dem Radius r einen beliebigen Punkt $Q_i(r, \varphi_i)$, in dem also die Anomalie den Wert $g(r, \varphi_i)$ annimmt. Bei einer derartigen Einteilung wird auf Grund der Definition des bestimmten Integrals der Ausdruck (1) für $\bar{g}(r)$ approximiert durch die Summe

$$\bar{g}(r) \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{n} g(r, \varphi_i)\, \Delta\varphi_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g(r, \varphi_i) = \dot{g}_n(r). \tag{4}$$

Es ist also das arithmetische Mittel $\dot{g}_n(r)$ der n Anomalienwerte $g(r, \varphi_i)$ an den diskreten Punkten $Q_i(r, \varphi_i)$ eine Approximation für $\bar{g}(r)$. Über die Lage der Punkte Q_i auf den Kreisbögen der Länge $\frac{2\pi r}{n}$ ist mit (4) noch nicht verfügt. Normalerweise wird man die Q_i so legen, dass sie den Kreis in n gleiche Bogenstücke einteilen; jedoch wird gelegentlich in der Praxis hiervon abgewichen.

Die Approximation (4) ist gültig für jedes $n \geqq 1$, wenn auch selbstverständlich mit unterschiedlicher Güte. Im folgenden Abschnitt soll geklärt werden, inwieweit n zusätzlichen Bedingungen unterliegt, wenn $\dot{g}_n(r)$ anstatt $\bar{g}(r)$ bei der Berechnung der 2. Ableitung g_{zz}^P benutzt wird.

2.3 Die Minimalzahl der Summanden von $\dot{g}_n(r)$.

Wie bereits am Schluss von Abschnitt 2.1 kurz ausgeführt wurde, dient das Polynom (2) zur Berechnung der 2. Ableitung aus dem Anomalienfeld. Die zu verschiedenen Radien r_j gehörenden Darstellungen der $\bar{g}(r_j)$ ergeben ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung von g_{zz}^P; hierbei werden für die numerische Rechnung die $\bar{g}(r_j)$ nach (4) durch $\dot{g}_n(r_j)$ ersetzt. Ist nun die Zahl n der Summanden in $\dot{g}_n(r_j)$ beliebig wählbar? Für die vorliegende Aufgabe der Errechnung von g_{zz}^P ergibt die nachstehende Überlegung, dass n eine gewisse

[1]) Diejenigen Leser, die mehr praktisch orientiert sind, können ohne wesentliche Beeinträchtigung des Verständnisses die beiden folgenden Abschnitte überschlagen und mit ihrer Lektüre sofort bei Abschn. 2.4 oder evtl. sogar 3.1 fortfahren.

Minimalzahl übersteigen muss, wenn die Ersetzung von $g(r_j)$ durch $\dot{g}_n(r_j)$ sinnvoll sein soll.

Das arithmetische Mittel $\bar{g}(r)$ des Kontinuums der Anomalienwerte $g(r, \varphi)$ ist auf Grund seiner Definition (1) unabhängig von der Orientierung des xy-Koordinatensystems in der horizontalen Bezugsebene von Fig. 1. Diese Unabhängigkeit gilt daher ebenfalls für die Koeffizienten in (2), insbesondere also für g_{zz}^P, was sich mit Hilfe der Laplaceschen Gleichung auch sofort direkt aus der Invarianz von $g_{xx}^P + g_{yy}^P$ gegenüber Drehungen des Koordinatensystems ergibt.

Das Näherungspolynom (2) wird bei der praktischen Rechnung nicht $\bar{g}(r)$, sondern $\dot{g}_n(r)$ gleichgesetzt. Nun lässt sich aber auch $\dot{g}_n(r)$ durch ein Näherungspolynom der Ordnung 2M darstellen, indem man in (4) die Werte $g(r, \varphi_i)$ von P aus nach Taylor bis zur Ordnung 2M entwickelt und die entstehenden n Polynome addiert. Soeben wurde konstatiert, dass die Koeffizienten des Polynoms (2) unabhängig sind von der Orientierung des xy-Koordinatensystems; diese Tatsache lässt folgende Forderung als sinnvoll erscheinen:

> Die Ersetzung von $\bar{g}(r)$ darf nur durch solche $\dot{g}_n(r)$ erfolgen, in deren jeweiligem Näherungspolynom der Ordnung 2M ebenfalls nur Glieder gerader Ordnung auftreten mit Koeffizienten, die sämtlich invariant gegenüber Drehungen des xy-Koordinatensystems in der Bezugsebene sind.

Eine Auskunft darüber, welche $\dot{g}_n(r)$ in diesem Sinne zur Ersetzung von $\bar{g}(r)$ geeignet sind, gibt Tab. 1. Man gelangt zu ihr in folgender Weise:

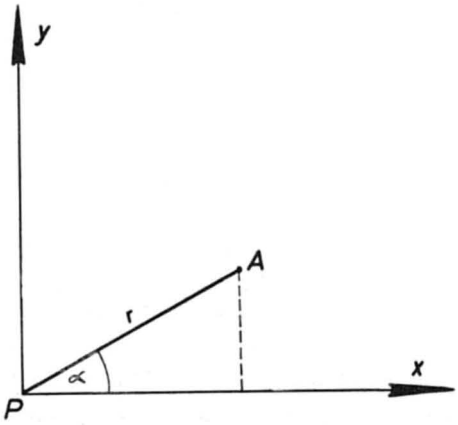

Fig. 2: Geometrische Bezeichnungen zu Formel (5)
Geometrical notations concerning formula (5)

Nach Fig. 2 lautet bei Verwendung von Polarkoordinaten r, α das Taylor-Polynom für die Schwereanomalie g^A im Punkte A von P aus:

$$g^A = g(r, \alpha) = \sum_{m=o}^{2M} \frac{r^m}{m!} \left[\sum_{l=o}^{m} \binom{m}{l} \left(\frac{\partial^m g}{\partial_x{}^{m-l}\, \partial_y{}^l} \right)^p \cos^{m-l}\alpha \, \sin^l\alpha \right] \tag{5}$$

Mit Hinblick auf Abschn. 2.2 identifiziere man nun den Punkt A mit dem Punkt $Q_1(r, \varphi_1)$ einer Anordnung von n Punkten $Q_i(r, \varphi_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, die den Kreis mit dem Radius r in n gleiche Bogenstücke teilen. Dann ergibt sich aus (4) für $\dot{g}_n(r)$ die Darstellung

$$\dot{g}_n(r) \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{m=o}^{2M} \frac{r^m}{m!} \left[\sum_{l=o}^{m} \binom{m}{l} \left(\frac{\partial^m g}{\partial_x{}^{m-l}\, \partial_y{}^l} \right)^P \cos^{m-l}\left(\alpha + \frac{2\pi(i-1)}{n}\right) \right.\right.$$
$$\left.\left. \sin^l\left(\alpha + \frac{2\pi(i-1)}{n}\right) \right] \right\}. \tag{6}$$

In dieser Darstellung dürfen nun gemäss der oben formulierten Forderung an die Eigenschaften von $\dot{g}_n(r)$ nur Glieder gerader Ordnung auftreten, deren Koeffizienten invariant gegenüber Drehungen des xy-Koordinatensystems, d.h. unabhängig von α sein müssen. Das führt nach Umformung von (6) in den Ausdruck

$$\dot{g}_n(r) \approx \frac{1}{n} \sum_{m=o}^{2M} \frac{r^m}{m!} \left\{ \sum_{l=o}^{m} \binom{m}{l} \left(\frac{\partial^m g}{\partial_x{}^{m-l}\, \partial_y{}^l} \right)^P \left[\sum_{i=1}^{n} \cos^{m-l}\left(\alpha + \frac{2\pi(i-1)}{n}\right) \right.\right.$$
$$\left.\left. \sin^l\left(\alpha + \frac{2\pi(i-1)}{n}\right) \right] \right\}. \tag{7}$$

zu der Forderung:

$$\sum_{i=1}^{n} \cos^{m-l}\left(\alpha + \frac{2\pi(i-1)}{n}\right) \sin^l\left(\alpha + \frac{2\pi(i-1)}{n}\right) = \begin{cases} o \text{ für } m = 2\mu - 1 \\ \text{unabhängig von } \alpha \text{ für } m = 2\mu \end{cases} \tag{8}$$
$$\mu = 0, 1, 2, \ldots, M; \; m \geqq l.$$

Diese Forderung ist keineswegs für alle Kombinationen der Zahlen m, l, n erfüllt. — Eine allgemeine Behandlung der Summe in (8) ist hier nicht von Interesse. Min Hinblick auf die Bedürfnisse der Praxis ist in Tab. 1 der Wert dieser Summe für $m = 1, 2, \ldots, 6$ und $n = 2, 3, 4, 6, 8$ angegeben. Eine Erweiterung der Tabelle auf höhere m sowie andere n ist leicht möglich.

Wie Tab. 1 zeigt, wird die Forderung (8) bei $M = 1$ erfüllt für $n = 3, 4, 6, 8$, jedoch nicht für $n = 2$; entsprechend bei $M = 2$ erfüllt für $n = 6, 8$, aber nicht für $n = 2, 3, 4$. — Das bedeutet nach den zu Anfang dieses Abschnittes angestellten Überlegungen: Soll die Darstellung (2) von $\bar{g}(r)$ bis zum Glied 2. (oder 4.) Ordnung gehen und $\dot{g}_n(r)$ gleichgesetzt werden, so muss $n \geqq 4$ (oder

Tab. 1: Wert der Summe in (8) für m = 1, 2, . . . 6 und n = 2, 3, 4, 6, 8.

m	l	n = 2	n = 3	n = 4	n = 6	n = 8	n* = 8
1	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0
2	0	$2\cos^2\alpha$	$\frac{3}{2}$	2	3	4	4
	1	$\sin 2\alpha$	0	0	0	0	0
	2	$2\sin^2\alpha$	$\frac{3}{2}$	2	3	4	4
3	0	0	$\frac{3}{4}(1-4\sin^2\alpha)\cos\alpha$	0	0	0	0
	1	0	$-\frac{3}{4}(1-4\cos^2\alpha)\sin\alpha$	0	0	0	0
	2	0	$-\frac{3}{4}(1-4\sin^2\alpha)\cos\alpha$	0	0	0	0
	3	0	$\frac{3}{4}(1-4\cos^2\alpha)\sin\alpha$	0	0	0	0
4	0	$2\cos^4\alpha$	$\frac{9}{8}$	$2(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha)$	$\frac{9}{4}$	3	$4(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha)$
	1	$\sin 2\alpha\cos^2\alpha$	0	$\frac{1}{2}\sin 4\alpha$	0	0	0
	2	$\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$	$\frac{3}{8}$	$\sin^2 2\alpha$	$\frac{3}{4}$	1	$2\sin^2 2\alpha$
	3	$\sin 2\alpha\sin^2\alpha$	0	$-\frac{1}{2}\sin 4\alpha$	0	0	0
	4	$2\sin^4\alpha$	$\frac{9}{8}$	$2(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha)$	$\frac{9}{4}$	3	$4(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha)$
5	0	0		0	0	0	0
	1	0		0	0	0	0
	2	0	abhängig	0	0	0	0
	3	0	von α	0	0	0	0
	4	0		0	0	0	0
	5	0		0	0	0	0
6	0	abhängig von α	abhängig von α	abhängig von α	abhängig von α	$\frac{5}{32}$	$4(\cos^6\alpha+\sin^6\alpha)$
	1					0	0
	2					$\frac{1}{32}$	$\sin^2 2\alpha$
	3					0	0
	4					$\frac{1}{32}$	$\sin^2 2\alpha$
	5					0	0
	6					$\frac{5}{32}$	$4(\cos^6\alpha+\sin^6\alpha)$

$\geqq$ 6) sein, damit die entsprechende Näherung (7) von 2. (oder 4.) Ordnung hierfür geeignet ist; bei der soeben angegebenen Limitierung von n ist nicht nur die Forderung (8) erfüllt, überdies verschwindet in der Taylor-Entwicklung von $\dot{g}_n(r)$ das auf die jeweilige Näherung (7) folgende Glied 3. (oder 5.) Ordnung.

Unter Bezugnahme auf die Darlegungen am Schluss von Abschnitt 2.1 und am Anfang dieses Abschnittes ergibt sich somit für die Praxis folgende Tatsache: Verwendet man zur Berechnung von g_{zz}^P Näherungspolynome vom Grade 2M = 4 für die $g(r_j)$, die durch $\dot{g}_n(r_j)$ ersetzt werden sollen, so ist es zweckmässig, $n \geqq 6$ zu wählen; dann sind die Koeffizienten der erhaltenen Näherungsformel für g_{zz}^P unabhängig von der Orientierung des xy-Koordinatensystems in der horizontalen Bezugsebene (Fig. 1). Eine solche Unabhängigkeit ist jedoch nicht mehr vorhanden, falls man $n = 4$ wählt, wenn also z.B. ein quadratisches Punktgitter der Berechnung zugrundegelegt wird (Rosenbach,

1953). — In diesem Zusammenhang werde noch eine Bemerkung angefügt, die Missverständnissen vorbeugen soll: Es sei eine praktische Berechnung von g_{zz}^P aus dem Anomalienfeld mit einer Näherungsformel durchgeführt, deren Koeffizienten invariant sind gegenüber Drehungen des xy-Systems. Trotzdem ist das Ergebnis im allgemeinen abhängig von (starren) Drehungen der n-Tupel von Punkten Q_i auf den Kreisen mit den Radien r_j. Diese Abhängigkeit ist jedoch nicht durch die Koeffizienten der Formel bedingt, sondern alleine dadurch, dass die Werte $\dot{g}_n(r_j)$ von derartigen Drehungen abhängig sind, was bei den Taylor-Entwicklungen der $\dot{g}_n(r_j)$ in den Gliedern höherer Ordnung als 2M zum Ausdruck kommt (vgl. z.B. Tab. 1). — Hiernach lässt sich nunmehr auch eine frühere Untersuchung (Rosenbach, 1954, S. 134/135) über den Einfluss der Orientierung eines quadratischen Punktgitters auf das Ergebnis einer Berechnung von g_{zz}^P in folgender Weise beurteilen: Die in Fig. 6 der zitierten Arbeit veranschaulichte Abhängigkeit der 2. Ableitung nach Rosenbach von der Orientierung des Punktgitters ist bedingt durch die entsprechende Abhängigkeit sowohl der Formelkoeffizienten als auch der Summen von g-Werten.

Bei Benutzung eines quadratischen Punktgitters der Maschenweite s ist es normalerweise üblich, auch die 8 Punkte zu verwenden, die auf dem Kreis mit dem Radius $s\sqrt{5}$ liegen, ihn aber nicht in gleiche Bogenstücke teilen (vergl. z.B. Rosenbach, 1954, Fig. 2). Auf diese Anordnung von Punkten bezieht sich in Tab. 1 die letzte Spalte $n^* = 8$, die sich sofort aus der Addition zweier Spalten $n = 4$ für die Winkel α und $\alpha' = \frac{\pi}{2} - \alpha$ ergibt. Wie die Spalte $n^* = 8$ zeigt, sind die Terme 4. Ordnung nicht invariant gegenüber Drehungen des xy-Systems, obwohl die Zahl der Punkte die gleiche ist wie bei $n = 8$.

2.4 Näherungsformeln für die 2. Ableitung.

Nunmehr wenden wir uns der Herleitung von Näherungsformeln zur Berechnung von g_{zz}^P in der Praxis zu. Wie bereits am Schluss von Abschnitt 2.1 zum Ausdruck gebracht, dient hierzu das Polynom (2) für k verschiedene Radien r_j:

$$\bar{g}(r_j) \approx g^P - \frac{1}{4} g_{zz}^P r_j^2 + a_4 r_j^4 + \ldots + a_{2M} r_j^{2M}, \quad j = 1, 2, \ldots, k. \tag{9}$$

In diesem System von k Gleichungen sind die linken Seiten als bekannt anzusehen, die später durch geeignete $\dot{g}_n(r_j)$ zu ersetzen sind. Auf den rechten Seiten sind die Potenzen der r_j bekannt, da die Radien ja willkürlich wählbar sind; hingegen sind die Koeffizienten dieser Potenzen Unbekannte, so auch die gesuchte 2. Ableitung g_{zz}^P. Die hier noch auftretende Grösse g^P kann als bekannt oder unbekannt angesehen werden; im ersten Falle sind auf der rechten

Seite des Systems (9) M, im zweiten Falle $M + 1$ Unbekannte vorhanden. Entsprechend muss für die Lösbarkeit des Systems $k = M$ bzw. $M + 1$ sein; dann ist das System auch stets lösbar, da die Nennerdeterminante jeweils eine Vandermondesche Determinante ist. Ist in den beiden genannten Fällen $k > M$ bzw. $> M + 1$, so liegt eine Überbestimmung vor und zur Lösung des Systems wird gewöhnlich die Ausgleichungsrechnung benutzt; hierauf wird an späterer Stelle in diesem Abschnitt noch eingegangen werden.

Nachstehend sind die Lösungen des Systems (9) bei bekanntem sowie unbekanntem g^P für $M = 1,2$ angegeben:

Fall 1: g^P bekannt.

a) $M = 1 = k$:

$$g_{zz}^P \approx \frac{4}{r_1^2} \{ g^P - \bar{g}(r_1) \} \tag{10}$$

b) $M = 2 = k$:

$$g_{zz}^P \approx \frac{4}{r_1^2 r_2^2 (r_2^2 - r_1^2)} \{ (r_2^4 - r_1^4) g^P - r_2^4 \bar{g}(r_1) + r_1^4 \bar{g}(r_2) \} \tag{11}$$

Fall 2: g^P unbekannt.

a) $M = 1 = k\text{-}1$:

$$g_{zz}^P \approx \frac{4}{r_2^2 - r_1^2} \{ \bar{g}(r_1) - \bar{g}(r_2) \} \tag{12}$$

b) $M = 2 = k\text{-}1$:

$$g_{zz}^P \approx \frac{4}{(r^2{}_3 - r_2^2)(r_3^2 - r_1^2)(r_2^2 - r_1^2)} \{ (r_3^4 - r_2^4) \bar{g}(r_1) - (r_3^4 - r_1^4) \bar{g}(r_2) + (r_2^4 - r_1^4) \bar{g}(r_3) \} \tag{13}$$

Wie bereits ausgeführt, werden bei einer praktischen Berechnung die $\bar{g}(r_j)$ der obigen Formeln nach (4) durch geeignete

$$\dot{g}n_j(r_j) = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} g(r_j, \varphi_i) \tag{14}$$

ersetzt, wobei

$$\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1} = \frac{2\pi}{n_j}, \quad \varphi_0 = \varphi n_j \tag{14a}$$

ist. Geeignet heisst gemäss Abschnitt 2.3, dass n_j genügend gross ist; also z.B. bei $M = 2$ muss $n_j \geqq 6$ sein, während nach Tab. 1 für $n_j = 4$ oder $n_j^* = 8$ das arithmetische Mittel (14) nicht geeignet erscheint. Die Ausgangsrichtung $\varphi_0 = \varphi_{nj}$ ist bei geeigneten $\dot{g}n_j(r_j)$ beliebig.

In den Formeln (10) — (14) ist über die Radien r_j noch nicht verfügt. Diese müssen in gewissen Grenzen den Forderungen der speziellen Aufgabe angepasst

werden; d.h. die Radien r_j müssen so dimensioniert sein, dass die gravimetrische Wirkung der zu erfassenden geologischen Struktur hinreichend die Summen (14) beeinflusst und so vermöge einer der Formeln (10) — (13) in g_{zz}^P erkennbar wird. Allerdings dürfen dabei die Radien weder zu klein noch zu wenig voneinander verschieden sein; denn sind sie zu klein, so werden die Summen in (14) einander praktisch gleich, womit g_{zz}^P nahezu verschwindet, sind sie hingegen zu wenig voneinander verschieden, so werden die Faktoren vor den Parenthesen zu gross, womit Fehler in den einzelnen g-Werten zu stark in g_{zz}^P wieder zum Vorschein kommen. — Diese Bemerkungen über die Dimensionierung der Radien r_j sind nun nicht so zu verstehen, dass hierüber in jedem neuen Messgebiet neu zu entscheiden ist; vielmehr soll damit nur zum Ausdruck gebracht werden, dass es normalerweise zweckmässig ist, grössere bzw. kleinere Radien zu verwenden, um die gravimetrische Wirkung tiefer bzw. höher gelegener Strukturen in g_{zz}^P zu erkennen. — Hiermit werde diese Betrachtung vorerst abgebrochen; es wird darauf in Abschnitt 3.1 nochmals näher eingegangen, und zwar bei der Diskussion von Gebrauchsformeln, die sodann zur Bearbeitung des praktischen Beispiels in Abschnitt 3.2 verwandt werden.

Über die gegenseitige Lage der Punkte Q (r_j, φ_i), an denen die Anomalienwerte $g(r_j, \varphi_i)$ für (14) zu entnehmen sind, ist bisher nichts ausgesagt. Insbesondere brauchen diese Punkte keinem regelmässigen Gitternetz anzugehören; andererseits dürfen sie es aber auch ohne weiteres, wenn die damit festgelegten n_j bei vorgegebenem Grad $2M$ der Näherungspolynome für $\bar{g}\ (r_j)$ die Bedingung (8) erfüllen. Bilden die Punkte Q (r_j, φ_i) kein regelmässiges Gitternetz, so erfordert die Errechnung *eines* Wertes g_{zz}^P die Ablesung von $\sum_{j=1}^{k} n_j$ Anomalienwerten aus dem Isogammenplan; bilden die Punkte Q (r_j, φ_i) hingegen ein regelmässiges Gitternetz, so erfordert die Errechnung *eines* Wertes g_{zz}^P auch nur die Ablesung *eines* Anomalienwertes, wenn man von den zusätzlich benötigten Anomalienwerten in einem gewissen Randstreifen des Messgebietes absieht. Hiermit kann sich für die Praxis ein erheblicher Unterschied im notwendigen Arbeitsaufwand ergeben, je nachdem ein regelmässiges Gitternetz benutzt wird oder nicht. Jedoch darf man den Gesichtspunkt des evtl. erheblich geringeren Aufwandes an Ablesearbeit alleine nicht ausschlaggebend sein lassen für die generelle Benutzung eines regelmässigen Gitternetzes, wie in Abschnitt 3.4 näher erläutert wird.

Die bisherigen Ausführungen beziehen sich auf den Fall, dass das Gleichungssystem (9) eindeutig nach der Cramerschen Regel zu lösen ist. Zu Beginn dieses Abschnittes wurde bereits erwähnt, dass im Falle einer Überbestimmung gewöhnlich die Ausgleichungsrechnung zur Lösung des Systems benutzt wird. So kann das von Elkins in seiner grundlegenden Arbeit über die 2. Ableitung

(Elkins, 1951) entwickelte Verfahren zur Berechnung von g_{zz}^P mit Bezug auf das System (9) in folgender Weise beschrieben werden: Der Punkt P gehöre einem quadratischen Gitternetz der Maschenweite s an. Zur Lösung des Gleichungssystems (9) für $M = 1$ dienen die bekannten Werte $g^P, g_{n_1}(s)$, $g_{n_2}(s\sqrt{2})$, $g_{n_3}^*(s\sqrt{5})$ mit $n_1 = n_2 = 4$ und $n_3^* = 8$ (vgl. Tab. 1); das System ist somit zweifach überbestimmt. — Überbestimmte Systeme werden bei teilweise modifizierten Zielsetzungen auch z.B. von Linsser (1955a, b) und Brown (1956) mit Hilfe der Ausgleichungsrechnung oder eng verwandter Methoden gelöst.

Die Benutzung überbestimmter Systeme hat vom mathematischen Standpunkt aus folgenden Sinn: Die Berechnung von g_{zz}^P ist eigentlich eine numerische Differentiation, die bekanntlich stark empfindlich in bezug auf Fehler in den Ausgangswerten ist. Daher erscheint eine Glättung der Ausgangswerte vielfach angebracht. Eine solche Glättung wird aber automatisch erreicht, wenn ein überbestimmtes Gleichungssystem durch Ausgleichung gelöst wird.

Es sind aber auch die mit Hilfe einfach bestimmter Gleichungssysteme (9) erhaltenen Näherungsformeln (10) — (13) dazu in der Lage, automatisch in verschiedener Stärke zu glätten, wenn nur die Formelparameter entsprechend geeignet gewählt sind. Hierauf wird in den Abschnitten 3.1 und 3.2 näher eingegangen; die dortigen Ergebnisse zeigen, dass es zwecks Erreichung einer Glättung keineswegs notwendig ist, zur Herleitung von Gebrauchsformeln für die 2. Ableitung überbestimmte Gleichungssysteme zu verwenden.

In der weiteren Untersuchung wird von der Behandlung überbestimmter Systeme Abstand genommen. Hierfür ist nicht nur der soeben behandelte Gesichtspunkt der Glättung massgebend, sondern die beiden nachstehend angegebenen Gründe sprechen ebenfalls dafür. Der erste Grund ist ein praktischer: Man denke sich (9) bei festem M als bestimmtes bzw. überbestimmtes System behandelt, die Anzahl der Radien sei k bzw. k' ($> k$), ausserdem seien die n_j für $j = 1, 2, \ldots, k$ in beiden Fällen die gleichen; dann enthält die Lösung des Systems k bzw. k' Summen (14), d.h. aber, dass der Arbeitsaufwand bei Anwendung der aus dem überbestimmten System hergeleiteten Formel für g_{zz}^P grösser ist als bei derjenigen aus dem bestimmten System. — Der zweite Grund für eine ausschliessliche Behandlung bestimmter Gleichungssysteme (9) ist theoretischer Natur und liegt ein wenig tiefer: Man denke sich wiederum (9) bei festem M als bestimmtes bzw. überbestimmtes System behandelt, und zwar mit Verwendung von k bzw. k' ($> k$) Radien; die jeweiligen n_j bzw. $n_{j'}$ seien geeignet gewählt und bleiben für das weitere fest. Wenn man nun in den allgemeinen Ausdrücken für die Lösungen g_{zz}^P bzw. $(g_{zz}^P)'$ die grössten Radien r_k bzw. $r_{k'}$ über alle Grenzen wachsen lässt, während die anderen Radien endlich bleiben, zeigen die Lösungen in den beiden Fällen ein grundsätzlich verschiedenes Verhalten. Die Lösung des bestimmten Systems geht in die entsprechende

für $M = M - 1$ und $k = k - 1$ über; hingegen werden in der Lösung des überbestimmten Systems für grosses $r_{k'}$ (und festen anderen Radien) sämtliche Koeffizienten sehr klein, um im Grenzfall $r_{k'} \to \infty$ zu verschwinden. Das bedeutet aber für die Praxis, dass u.U. eine Struktur im Bild der 2. Ableitung nicht erkannt werden kann, weil der Radius des äussersten Kreises zu gross gewählt worden ist. Wie unbefriedigend die Verwendung einer solchen Formel sein kann, zeigt die folgende Überlegung: Es sei in einem praktisch unendlich ausgedehnten, linearen Regionalanstieg der Bouguer-Anomalien deutlich die lokale gravimetrische Wirkung einer Struktur erkennbar. Das Isogammenbild werde mit solchen Formeln g_{zz}^P bzw. $(g_{zz}^P)'$ bearbeitet, für die r_k bzw. $r_{k'}$ so gross seien, dass die Anomalienwerte auf den zugehörigen Kreisen von der Struktur nicht mehr beeinflusst werden; die anderen Radien r_j bzw. $r_{j'}$ mögen in der Grössenordnung des gravimetrischen Wirkungsbereiches der Struktur in der Bezugsebene liegen. Dann arbeitet die Formel g_{zz}^P so, als ob der Kreis mit dem Radius r_k nicht berücksichtigt wird; sie kann also durchaus die Struktur im Bild der 2. Ableitung sichtbar machen. Demgegenüber nützt es bei der Formel $(g_{zz}^P)'$ gar nichts, dass $(k' - 1)$ Kreise im Wirkungsbereich der Struktur liegen, also auch die gravimetrische Wirkung der Struktur in die Formel eingeht; alleine der zu grosse Radius $r_{k'}$ bewirkt praktisch verschwindende Koeffizienten vor den Summen (14), so dass es nicht möglich ist, die Struktur im Bild der 2. Ableitung sichtbar zu machen.

Hiermit möge die weitgehend theoretisch orientierte Betrachtung über die Herleitung von Gebrauchsformeln für die 2. Ableitung beendet sein. In den nachfolgenden Abschnitten wird nunmehr auf die praktische Anwendung solcher Formeln eingegangen.

3. *Die Anwendung von Näherungsformeln für die 2. Ableitung bei der Bearbeitung praktischer Messergebnisse.*

Die im letzten Abschnitt angegebenen Formeln (10) — (13) dürften bei passender Wahl der Radien r_j sowie hinreichend grossen n_j in (14) den Erfordernissen der Praxis weitgehend genügen. Da es sich hierbei lediglich um *Näherungs*formeln handelt, werden verschiedene Formeln mit jeweils verschiedenen oder auch gleichen r_j, n_j bei Anwendung auf das gleiche Anomalienfeld im allgemeinen mehr oder minder verschiedene Approximationen des wahren g_{zz}-Feldes liefern. Es ist daher notwendig, aus der Mannigfaltigkeit der verfügbaren Formeln eine Auswahl für die praktische Anwendung zu treffen. Eine solche Auswahl ist nur möglich auf Grund eines näheren Studiums der „Eigenschaften" spezieller Formeln, das in bezug auf einige wesentliche Gesichtspunkte in den Abschnitten 3.1 — 3.4 durchgeführt wird.

3.1 Gebrauchsformeln für ein regelmässiges Sechseck-Gitter.

Zunächst soll aus Gründen der Zweckmässigkeit der Diskussion ein regelmässiges Sechseck-Gitter nach Fig. 3 zugrunde liegen. Die Kantenlänge s des Gitters wird normalerweise in der Grössenordnung benachbarter Gravimeter-

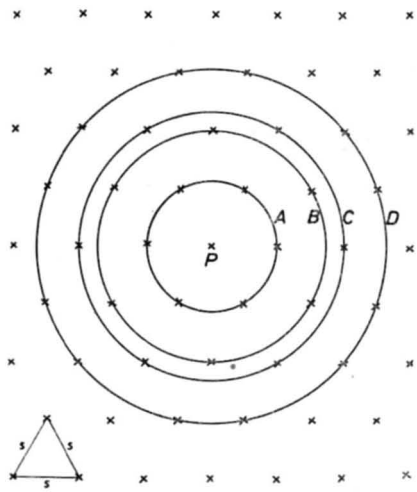

Fig. 3: Sechseck-Gitter der Kantenlänge s. Hexagonal grid of spacing s.

stationen zu wählen sein. — Mit Bezugnahme auf die Kreise A, B, C, D und die auf ihnen liegenden Punkte in der Fig. 3 hat eine Näherungsformel für die 2. Ableitung die Gestalt

$$g_{zz}^{P} \approx K\,[f^{P}\,g^{P} + f^{A}\sum_{i=1}^{6} g_i^{A} + f^{B}\sum_{i=1}^{6} g_i^{B} + f^{C}\sum_{i=1}^{6} g_i^{C} + f^{D}\sum_{i=1}^{12} g_i^{D}] \tag{15}$$

dabei sind diejenigen Koeffizienten f gleich Null, deren zugehörige Kreise für die Herleitung einer speziellen Formel nicht benutzt worden sind. Tab. 2 gibt nun die Koeffizienten K und f von 12 solcher Formeln an, die sich aus (10) — (13) errechnen, wenn dort (14) mit den jeweiligen geometrischen Daten r, n aus dem unteren Teil der Tabelle eingesetzt wird.

Durch die Benutzung eines regelmässigen Sechseck-Gitters ist sichergestellt, dass die Anzahlen n der Punkte auf den Kreisen A, B, C im Sinne der Bemerkung anschliessend an (14a) genügend gross sind, um in den Reihen für $\bar{g}$ bzw. $\dot{g}$ die Glieder bis $M = 2$ „sinnvoll" zu erfassen. Diese Aussage gilt auch für die 12 Punkte auf dem Kreis D, obwohl diese (14a) nicht erfüllen; denn die „unregelmässige" Anordnung der 12 Punkte auf D entsteht ja durch Superposition von zwei „regelmässigen" Anordnungen mit je 6 Punkten, wie sie auch bei den Kreisen A, B, C vorliegen.

Tab. 2 Koeffizienten K und f einiger Näherungsformeln für g_{zz}^P nach (15) sowie geometrische Daten über die benutzten Punktanordnungen bei Verwendung des regelmässigen Sechseck-Gitters von Fig. 3.

(Die Formeln ergeben die Näherungswerte von g_{zz}^P in 10^{-15} cgs. wenn die Kantenlänge s in km und die Anomalienwerte g in 0,01 mgal gemessen werden).

Berechnet aus:	Formel Nr.	K	f^P	f^A	f^B	f^C	f^D	Mittlerer Fehler der Näherungsformel für g_{zz} (E = mittlerer Fehler der g-Werte)
(10)	I	$2/3s^2$	+ 6	— 1	0	0	0	4,32 E/s^2
	II	$1/6s^2$	+ 6	0	0	— 1	0	1,08 E/s^2
(11)	III	$1/9s^2$	+ 48	— 9	+ 1	0	0	5,88 E/s^2
	IV	$1/18s^2$	+ 90	— 16	0	+ 1	0	5,45 E/s^2
	V	$1/18s^2$	+ 42	0	— 16	+ 9	0	3,42 E/s^2
	VI	$1/126s^2$	+ 198	0	0	— 49	+ 8	1,85 E/s^2
(12)	VII	$1/3s^2$	0	+ 1	— 1	0	0	1,15 E/s^2
	VIII	$2/9s^2$	0	+ 1	0	— 1	0	0,77 E/s^2
	IX	$1/18s^2$	0	+ 2	0	0	— 1	0,30 E/s^2
(13)	X	$1/9s^2$	0	+ 7	— 15	+ 8	0	5,00 E/s^2
	XI	$1/18s^2$	0	+ 10	— 12	0	+ 1	2,13 E/s^2
	XII	$1/54s^2$	0	+ 22	0	— 32	+ 5	1,79 E/s^2
Geometrische Daten:	Kreis		P	A	B	C	D	
	Radius: r		0	s	$\sqrt{3}$ s	2s	$\sqrt{7}$ s	
	Anzahl der Punkte: n		1	6	6	6	12	

Wie die Tab. 2 zeigt, nehmen die Koeffizienten in den einzelnen Formeln recht unterschiedliche Werte an. Hieraus folgt eine unterschiedliche Fortpflanzung von Fehlern der Anomalienwerte g in die jeweiligen Näherungswerte g_{zz}^P. Die letzte Spalte der Tabelle gibt den mittleren Fehler (standard deviation) der Näherungswerte von g_{zz}^P an unter der Voraussetzung, dass E = const der mittlere Fehler eines jeden Anomalienwertes g ist; d.h. ein Wert in der letzten Tabellenspalte gibt den mittleren Fehler der entsprechenden rechten Seite von (15) auf Grund des Fehlerfortpflanzungsgesetzes an.

Der mittlere Fehler ist nun für die Anwendung der Formeln in zweifacher Hinsicht von Bedeutung:

1) Seiner Natur nach ist der mittlere Fehler ein Mass für die Streuung der *näherungsweise errechneten* Werte g_{zz}, d.h. für die Streuung der rechten Seite einer Näherungsformel (15) für g_{zz}, bedingt durch die Streuung E der g-Werte. — Erfahrungsgemäss besitzen in der praktischen Anwendung Formeln mit kleinerem (grösserem) mittleren Fehler eine Tendenz zu stärkerer (schwächerer) Glättung der Ergebnisse (vgl. hierzu auch Abschn. 2.4). Haben also ober-

flächennahe Dichtestörungen durch unvollkommene Erfassung der Dichte bei der Reduktion der Schwerewerte einen fehlerhaften Einfluss auf die Anomalien, so besteht nur bei Anwendung von Formeln mit kleinerem mittleren Fehler begründete Aussicht, die gravimetrische Wirkung geologischer Strukturen im Bild der 2. Ableitung erkennen zu können.

2) Der mittlere Fehler gestattet bis zu einem gewissen Grade eine Aussage über die „Fähigkeit" einer Formel, die gravimetrische Wirkung verschiedener Bauelemente in der Erdkruste wiederzugeben: Um grossräumige, tiefer gelegene bzw. kleinräumige, höher gelegene Strukturen in den errechneten Näherungswerten von g_{zz} sichtbar machen zu können, empfiehlt sich die Anwendung von Formeln mit kleinerem bzw. grösserem mittleren Fehler. Das ergibt sich sofort bei Betrachtung der Tab. 2. Dort sind innerhalb der 4 Formelgruppen, die sich von (10) — (13) herleiten, die einzelnen Formeln im Sinne abnehmender mittleren Fehler angeordnet. Wie ein Blick auf die geometrischen Daten im unteren Teil der Tabelle lehrt, ist diese Abnahme gleichzeitig verbunden mit einer Vergrösserung der Ausdehnung der jeweiligen Punktkonfiguration, die der betreffenden Formel zugrunde liegt. Andererseits besitzen grossräumige, tiefer gelegene Strukturen einen grösseren Wirkungsbereich in der Bezugsebene als kleinräumige, höher gelegene. Es ist daher durchaus plausibel, dass sich zur Erfassung einer Struktur mit grösserem (kleinerem) Wirkungsbereich solche Formeln empfehlen, deren zugrunde liegende Punktkonfiguration ein grösseres (kleineres) Flächenstück bedecken, deren mittlere Fehler also kleiner (grösser) sind.

Kommt allerdings in einem Messgebiet zur gravimetrischen Wirkung kleinräumiger, höher gelegener Strukturen noch diejenige oberflächennaher Dichtestörungen hinzu, so wird es vielfach schwer oder sogar unmöglich sein, einen Kompromiss zwischen den entsprechenden Forderungen nach 1) und 2) zu finden.

Hiermit werde die Diskussion der Näherungsformeln für g_{zz} vorerst abgebrochen. Sie wird in Abschnitt 3.3 fortgeführt, nachdem im folgenden Abschnitt 3.2 die Ergebnisse der Anwendung einiger Formeln auf ein praktisches Beispiel besprochen worden sind.

3.2 Ein Beispiel: Das Los Angeles Basin.

Für die praktische Anwendung von Näherungsformeln zur Berechnung von g_{zz} erscheint es wünschenswert, dass die benötigten Anomalienwerte ohne Schwierigkeiten aus dem Isogammenplan entnommen werden können. Es ist dazu allerdings erforderlich, die Isogammen recht sorgfältig und hinreichend eng zu zeichnen. Vielfach kann man bei Verwendung des üblichen Massstabes 1 : 25000 die Isogammen im Abstand von 0,2 mgal kartieren, um dann die Anomalienwerte zur Berechnung von g_{zz} auf 0,02 mgal interpola-

torisch zu schätzen. Naturgemäss bedeuten die Kartierung der Isogammen aus den Messwerten eines Stationsnetzes sowie die anschliessende Interpolation bereits eine gewisse Glättung des Anomalienfeldes, die für die praktische Auswertung durchaus erwünscht ist.

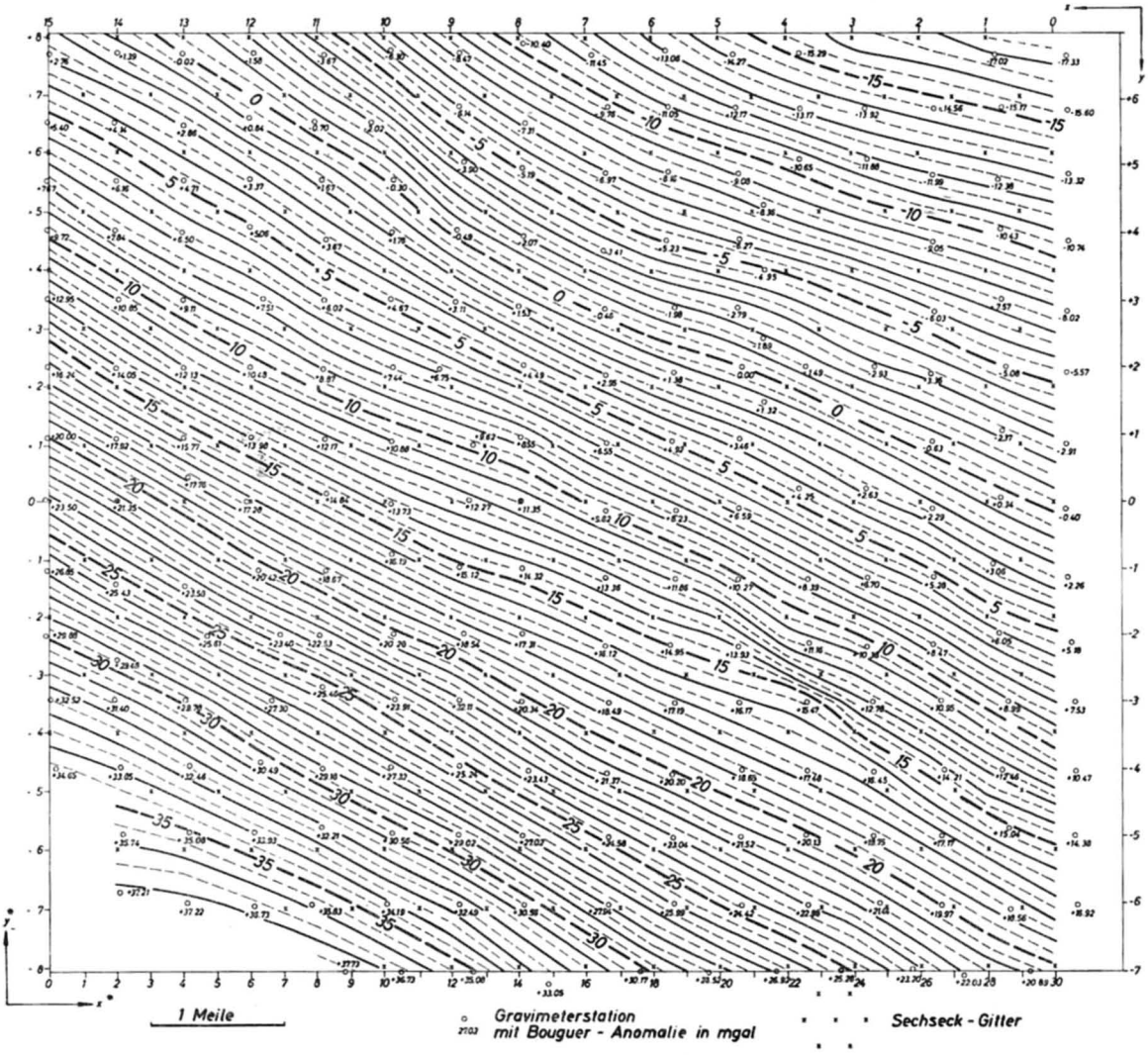

Fig. 4: Los Angeles Basin, California, Bouguer-Anomalien
(mit freundlicher Genehmigung der Gulf Research and Development Company, Pittsburgh, PA., USA)

Los Angeles Basin, California, Bouguer-anomalies
(Courtesy of Gulf Research and Development Company, Pittsburgh, PA., USA)

Im folgenden soll nun die Bearbeitung eines Messgebietes vorgelegt werden, in dem der regionale Schwereanstieg so stark ist, dass bei Kartierung im Massstab 1 : 25000 die Isogammen nur von 0,5 mgal zu 0,5 mgal gezeichnet werden können, d.h. die Anomalienwerte für die Berechnung von g_{zz} nur auf 0,05 mgal zu schätzen sind. Es handelt sich hierbei um das Los Angeles Basin, eines der von Elkins (1951) publizierten Anwendungsbeispiele. In Fig. 4 [1]) ist der Isogammenplan dargestellt, der aus den eingetragenen Messwerten gezeichnet ist, und zwar mit möglichst geringer „Generalisierung" des Isogammenverlaufs, die stellenweise wohl durchaus vertretbar gewesen wäre. Es sollte damit bewusst eine zu starke Glättung des Anomalienfeldes vermieden werden, um nicht willkürlich die g-Werte für die Errechnung von g_{zz} günstig zu beeinflussen. — Elkins legte seiner Berechnung von g_{zz} ein quadratisches Gitter der Kantenlänge $s = 1/2$ Meile zugrunde, dessen Koordinaten x, y am oberen und rechten Rand der Fig. 4 markiert sind. Um nun einige der im vorigen Abschnitt angegebenen Formeln zu prüfen, wurde das Messgebiet mit dem regelmässigen Sechseck-Gitter der Kantenlänge $s = 1/2$ Meile überdeckt, das in der Figur eingezeichnet ist; die Festlegung dieser Gitterpunkte erfolgt mit Hilfe der am unteren und linken Rand der Fig. 4 angegebenen Koordinaten x^*, y^* in der Weise, dass beide entweder geradzahlig oder ungeradzahlig sein müssen. Das Sechseck-Gitter ist so orientiert, dass seine Punkte $y^* = 0$; $x^* = 0, 2, 4, \ldots$ mit den Punkten $y = 0$; $x = 0, 1, 2, \ldots$ des quadratischen Gitters zusammenfallen.

Die Anomalienwerte g in den Punkten des Sechseck-Gitters, interpoliert aus den Isogammen, sind in Tab. 3 zusammengestellt. Diese Werte bilden die Grundlage der Berechnung von g_{zz} bei Verwendung der Formeln VIII, VI, III aus Tab. 2; die entsprechenden Ergebnisse sind in den Fig. 5-7 dargestellt.

Die Isanomalen von g_{zz} haben in den drei Fällen keineswegs das gleiche Aussehen. Fig. 5 zeigt ein ruhiges, ausgeglichenes Bild, das sich nur wenig von demjenigen in der grundlegenden Arbeit von Elkins (1951, S. 47) unterscheidet. In Fig. 6 ist die Streichrichtung NW — SE der Isanomalen noch deutlich vorherrschend, ihr Verlauf allerdings bereits ein wenig unruhiger. Hingegen ist in Fig. 7 die gravimetrische Wirkung von NW — SE streichenden Strukturen praktisch nicht mehr zu erkennen.

Vergleicht man diese Bilder mit der bekannten Lage der ölführenden Strukturen (Elkins, 1951, S. 46/47), so wird man zweifelsohne Fig. 5 den Vorzug geben, Fig. 6 allenfalls noch gelten lassen, Fig. 7 aber als unbrauchbar erklären. Ein generelles Urteil über die Brauchbarkeit der Formeln, mit deren Hilfe die drei Bilder berechnet sind, ist jedoch damit noch nicht gefällt, vielmehr muss

[1]) Die Veröffentlichung der Fig. 4, der daraus erhaltenen Fig. 5-8 sowie der zugehörigen Diskussionen im Text geschieht mit freundlicher Genehmigung der Gulf Research and Development Company, Pittsburgh, P. A.

Tab. 3: Bouguer-Anomalien (multipliziert mit 100) in den Punkten x^*, y^* des Sechseck-Gitters, interpoliert aus den Isogammen der Fig. 4.

$y^* \backslash x^*$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
+ 8	220		085		055		200		420		655		865		1040		negativ
+ 7		370		235		080		090		270		520		730		890	negativ
+ 6	650		520		375		230		060		115		380		580		negativ
+ 5		790		645		515		370		205		010		215		400	negativ
+ 4	1150		960		790		670		505		360		165		020		negativ
+ 3		1320		1125		960		815		670		530		370		190	positiv
+ 2	1715		1500		1315		1140		980		850		735		585		positiv
+ 1		1930		1720		1525		1350		1190		1065		950		810	positiv
0	2330		2135		1920		1720		1550		1375		1265		1145		positiv
— 1		2520		2325		2115		1925		1750		1580		1450		1350	positiv
— 2	2890		2715		2525		2325		2150		1955		1795		1660		positiv
— 3		3085		2930		2740		2565		2380		2180		2005		1845	positiv
— 4	3360		3265		3120		2930		2760		2575		2390		2185		positiv
— 5				3420		3285		3125		2950		2775		2580		2375	positiv
— 6			3625		3570		3470		3330		3165		2990		2780		positiv
— 7								3635		3515		3360		3180		2980	positiv
— 8											3685		3535		3325		positiv

$y^* \backslash x^*$	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
+ 8	1170		1310		1440		1540		1620		1670		1740			negativ
+ 7		1035		1165		1285		1380		1450		1510		1570		negativ
+ 6	730		860		970		1070		1190		1270		1330		1390	negativ
+ 5		550		670		775		880		980		1060		1135		negativ
+ 4	190		340		430		520		645		750		850		940	negativ
+ 3		030		095		210		330		440		560		665		negativ
+ 2	420		255		135		005		155		265		385		490	negativ
+ 1		635		480		340		200		050		085		215		negativ
0	980		835		680		515		360		230		075		050	negativ
— 1		1215		1060		885		710		560		390		240		positiv
— 2	1530		1405		1290		1050		920		750		550		435	positiv
— 3		1710		1585		1495		1275		1120		930		750		positiv
— 4	2020		1880		1760		1665		1500		1300		1090		930	positiv
— 5		2210		2065		1930		1805		1670		1480		1310		positiv
— 6	2580		2405		2245		2115		1970		1820		1650		1520	positiv
— 7		2775		2585		2425		2280		2135		1970		1820		positiv
— 8	3140		2960		2800		2630		2470		2285		2130		2015	positiv

man in dieser Hinsicht noch folgende Tatsachen betrachten: Die drei Formeln VIII, VI, III weisen nach der letzten Spalte von Tab. 2 wesentlich unterschiedliche Werte im mittleren Fehler auf. Das bedeutet aber auf Grund der diesbezüglichen Ausführungen in Abschnitt 3.1, dass Formel VIII die gravimetrische Wirkung der grossräumigen Strukturen gut erfassen kann und dass überdies noch ihre Ergebnisse durch die Streuung der g-Werte wenig beeinflusst werden. Andererseits gilt für Formel III die entgegengesetzte Aussage. In den von ihr gelieferten Isanomalen der Fig. 7 kommen daher vorwiegend die

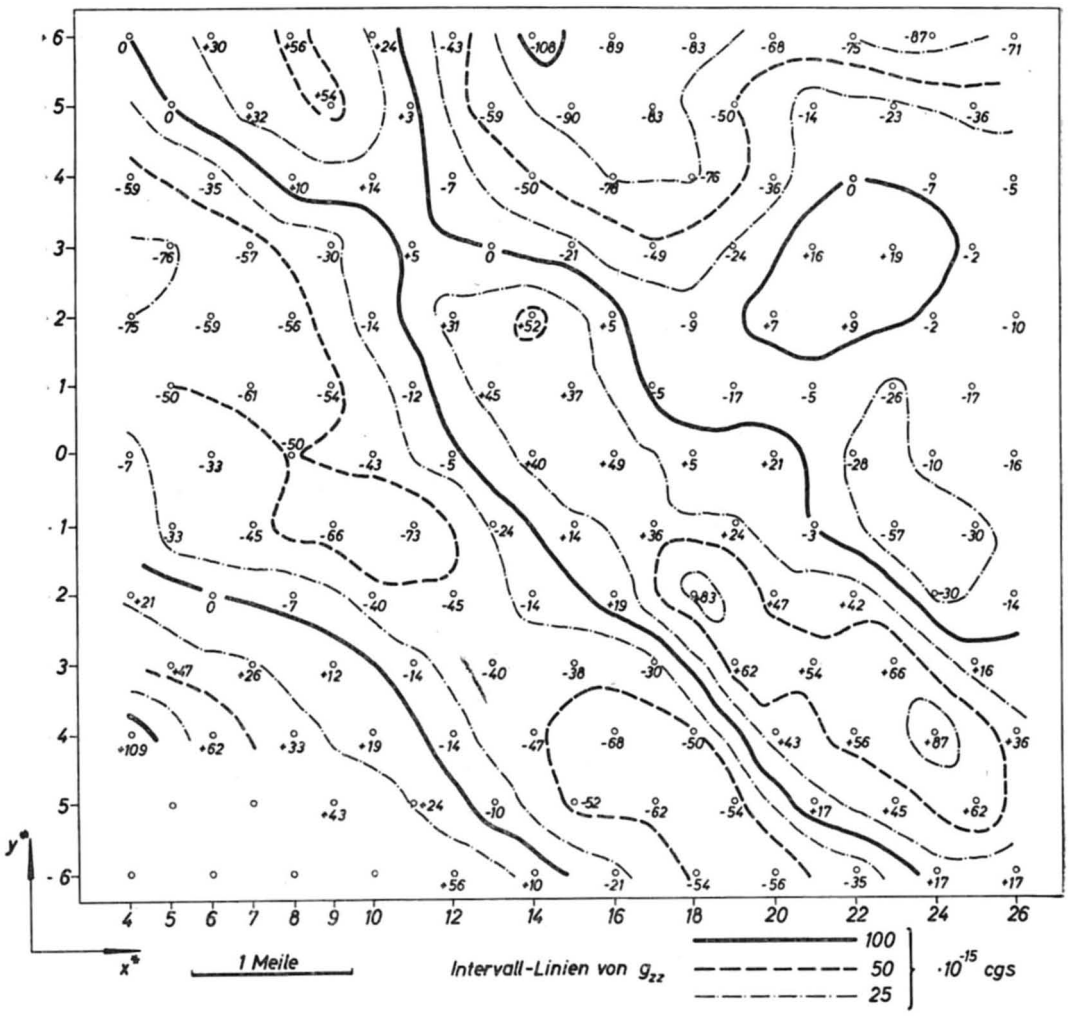

Fig. 5: Los Angeles Basin, g_{zz} nach Formel VIII
Los Angeles Basin, g_{zz} according to formula VIII

gravimetrischen Wirkungen höher gelegener Bauelemente der Kruste sowie Fehler in den g-Werten zur Abbildung. Rührt nun die Unruhe in Fig. 7 alleine von Fehlern in den g-Werten her? Diese Frage lässt sich mit Hilfe von Fig. 8 verneinend beantworten. Aus den beiden Kurven ergibt sich klar, dass innerhalb des grossräumigen Verlaufs der Anomalien im Bereich $3 \leqq x \leqq 5$, $-4 \leqq y \leqq -2$ eine zusätzliche gravimetrische Wirkung der Grössenordnung 1 mgal erkennbar ist, die wegen ihrer geringen Erstreckung nicht von jenen Bauelementen der Erdkruste herrührt, die das ruhige Bild in Fig. 5 hervorrufen.

Diese zusätzliche lokale Anomalie ist der Anlass für die starke Bewegung in den Werten von g_{zz} im entsprechenden Bereich der Fig. 7. Ähnliche, nicht so krasse Verhältnisse herrschen in der Umgebung des Punktes $x^* = 16$, $y^* = 0$ der gleichen Figur. Sind also neben der erdölgeologisch interessierenden,

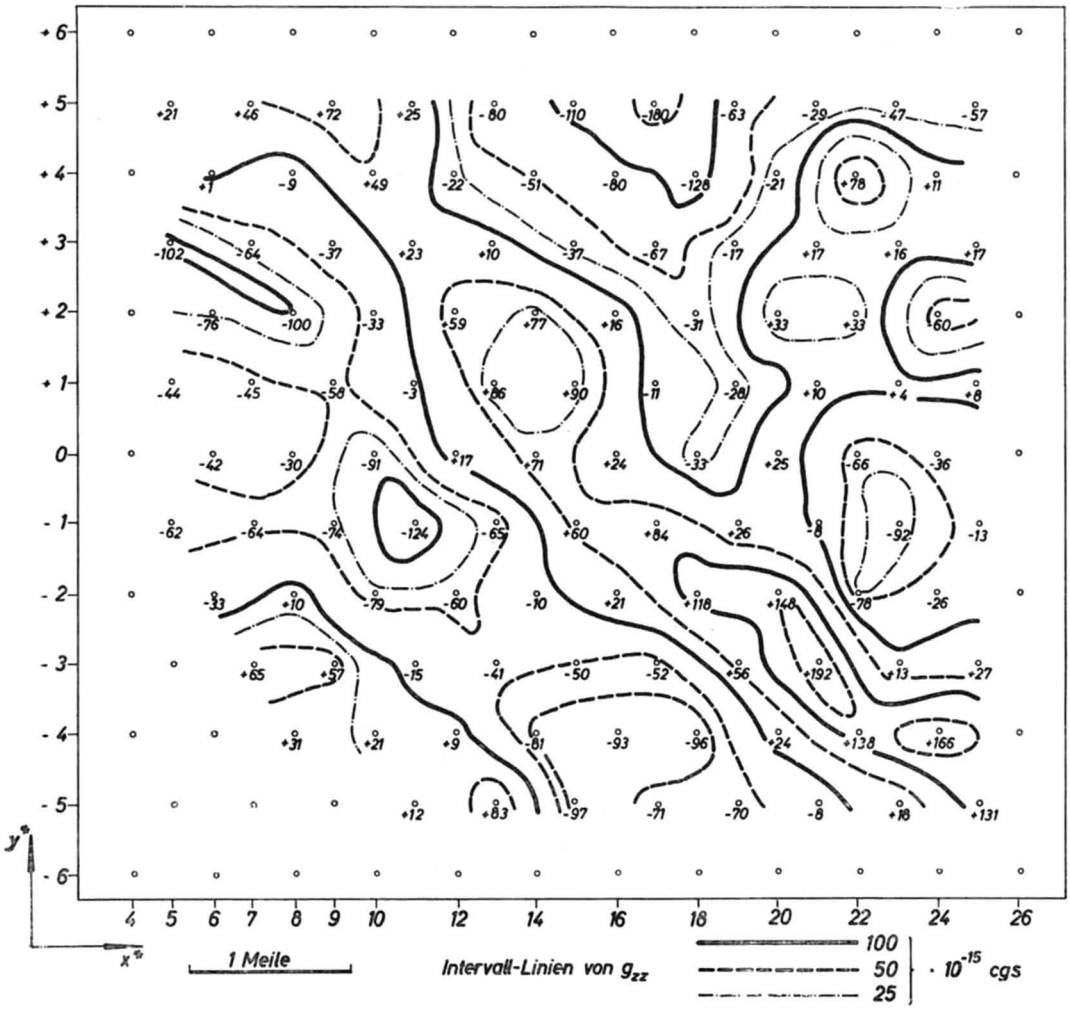

Fig. 6: Los Angeles Basin, g_{zz} nach Formel VI
Los Angeles Basin, g_{zz} according to formula VI

grossräumigen gravimetrischen Wirkung noch kleinräumige von genügender Intensität vorhanden, so darf man sich nicht wundern, wenn die Ergebnisse einer Formel mit grossem mittleren Fehler von letzteren stark beeinflusst werden. Vielmehr sollte man es nicht als selbstverständlich ansehen, dass eine

Formel mit kleinem mittleren Fehler, wie z.B. Formel VIII, eine lokale Anomalie vom Ausmass derjenigen im Gebiet $3 \leqq x \leqq 5$, $-4 \leqq y \leqq -2$ (vgl. Fig. 4 und 8) durch Glättung in ihrer Wirkung „unsichtbar" macht. — Nach diesen Überlegungen lässt sich in bezug auf ein Urteil über die Brauchbarkeit der

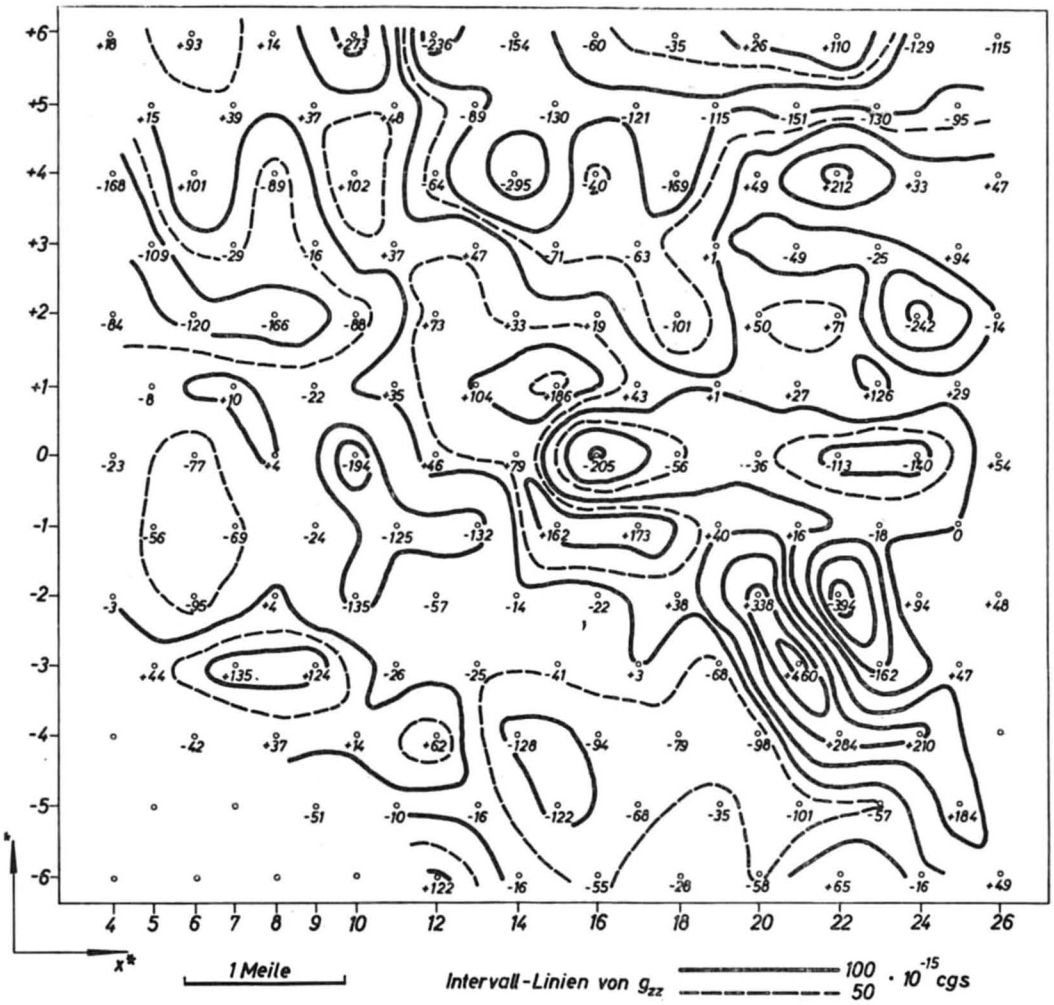

Fig. 7: Los Angeles Basin, g_{zz} nach Formel III
(Formel IV liefert praktisch das gleiche Bild)
Los Angeles Basin, g_{zz} according to formula III
(formula IV yields practically the same picture)

verschiedenen Formeln zusammenfassend folgendes sagen: Im Falle des Los Angeles Basin interessieren die grossräumigen Strukturen, die in Fig. 5 besonders günstig erkennbar sind. Es interessieren nicht die kleinräumigen, lokalen

gravimetrischen Wirkungen, die erfreulicherweise bei Anwendung von Formel VIII praktisch nicht hervortreten. Jedoch verbietet das Vorhandensein dieser kleinräumigen, gravimetrisch wirksamen Bauelemente die Anwendung von Formel III. Wäre hingegen das Ziel der gravimetrischen Untersuchung nicht die Erkennung der grossräumigen Bauelemente, sondern der kleinräumi-

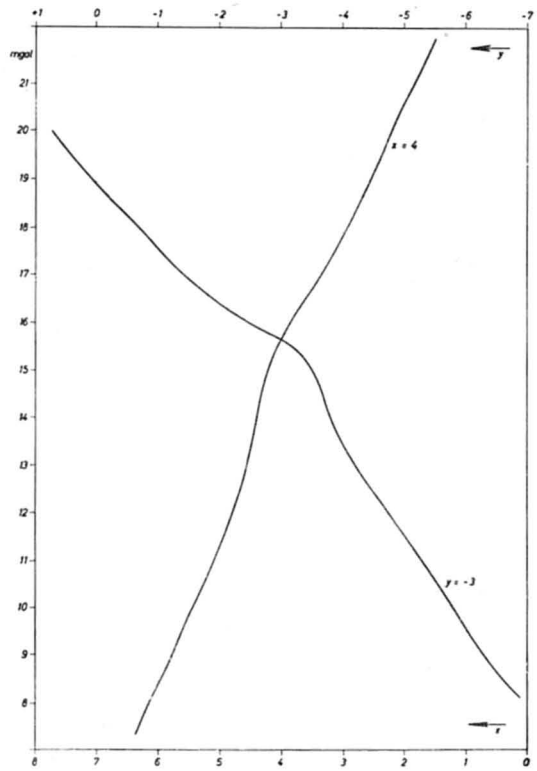

Fig. 8: Bouguer-Anomalien auf zwei Profilen entlang x = 4 und y = -3 aus dem Isogammenplan der Fig. 4
Bouguer anomalies along two profiles (x = 4 and y = -3), drawn from the isogram map of fig. 4.

gen von der Grössenordnung desjenigen im Gebiet $3 \leqq x \leqq 5$, $-4 \leqq y \leqq -2$, so wäre Formel VIII für diesen Zweck absolut ungeeignet, möglicherweise auch noch Formel III. Voraussichtlich würde ein Versuch mit einer der Formeln III, IV oder VI zufriedenstellend verlaufen, wenn die Kantenlänge s des Gitters geeignet kleiner gewählt wird; das setzt allerdings eine engere Vermessung des fraglichen Gebiets und seiner Umgebung sowie eine genauere Arbeitsweise bei der Interpolation voraus.

Hiermit werde die Diskussion über die Bearbeitung des Anomalienfeldes im Los Angeles Basin beendet; die Ergebnisse derselben sind jedoch noch wesentlich für die im nächsten Abschnitt zu behandelnde Frage nach der Vergleichbarkeit verschiedener Näherungsformeln für die zweite Ableitung.

3.3 Über die Vergleichbarkeit verschiedener Näherungsformeln für die zweite Ableitung.

Nach den allgemeinen Entwicklungen im Abschnitt 2.4 existiert eine unübersehbare Mannigfaltigkeit von Näherungsformeln zur Berechnung der zweiten Ableitung. Für die Zwecke der Praxis allerdings genügen einige wenige, die man sich auf Grund ihrer speziellen „Eigenschaften" auswählen muss. Die Auswahl kann erheblich erleichtert werden, wenn man weiss, nach welchen Gesichtspunkten verschiedene Formeln miteinander zu vergleichen sind. — Ein anschauliches Beispiel einer solchen Auswahl bilden die Fig. 5-7. Obwohl die dort benutzten Formeln VIII, VI und III formal Näherungsausdrücke für die gleiche Grösse g_{zz} darstellen, sind ihre Ergebnisse zum Teil extrem verschieden. Die Gründe hierfür sind im vorigen Abschnitt dargelegt; sie zeigen, dass eine absolute Bewertung von Näherungsformeln für die zweite Ableitung gar nicht möglich ist, sondern dass es darauf ankommt, welcher Typus einer gravimetrischen Wirkung erkannt werden soll. Das bedeutet gleichzeitig, dass die Frage nach der Existenz einer universal verwendbaren Formel, die allen praktischen Erfordernissen gerecht werden kann, verneint werden muss.

In Abschnitt 3.2 wurde zur Erklärung der unterschiedlichen Bilder das Unterscheidungsmerkmal des mittleren Fehlers der benutzten Formeln herangezogen. Hiernach wie aus weiteren Erfahrungen lässt sich allgemein folgendes sagen: Liegt s in der Grössenordnung von 1 km, so sind Formeln mit einem mittleren Fehler von 0,5 — 1 x E/s^2 zur Lokalisierung grossräumiger, tiefer liegender Strukturen besonders geeignet, wohingegen solche mit einem mittleren Fehler über ca. 4 E/s^2 zur Erkennung kleinräumiger, höher liegender Strukturen brauchbar sind.

Formeln mit *gleichem* mittleren Fehler liefern jedoch nicht völlig gleichartige Ergebnisse. Vielmehr spielt dabei noch eine gewisse Rolle, in welchem Masse die Koeffizienten einer Formel abnehmen, wenn sie wie in (15) im Sinne wachsender r_j angeordnet werden. Es wird offenbar durch die Abnahmerate der Koeffizienten das „Einflussgebiet" des Anomalienfeldes auf den Näherungswert von g_{zz} reguliert.

Auf den folgenden Punkt muss noch besonders hingewiesen werden: Es empfiehlt sich nicht, Formeln *ohne* g^P mit *grossem* mittleren Fehler, z.B. Formel X in Tab. 2, in der Praxis zur Lokalisierung kleinräumiger Strukturen zu benutzen. Das Fehlen von g^P wirkt sich im allgemeinen ungünstig auf die Deutbarkeit des g_{zz}-Bildes aus. Es ist also nicht ratsam, solche Formeln zu

einem Vergleich mit anderen heranzuziehen, deren mittlerer Fehler in der gleichen Grössenordnung liegt.

Zum Abschluss dieses Abschnitts werde noch auf den früheren Versuch eines Vergleichs von Formeln für die 2. Ableitung eingegangen, der im Rahmen der Diskussion zu einer Arbeit des Verfassers (Rosenbach, 1953, S. 907-912) angestellt wurde. Die Vergleichsergebnisse der Fig. A (S. 908) einerseits und der Fig. B (S. 910/911) andererseits schienen diametral entgegengesetzt zu sein. Im Lichte der vorstehenden Betrachtungen muss man jedoch sagen, dass die Ergebnisse in den beiden Vergleichsfällen gar nicht anders sein konnten: Es haben nämlich die beiden miteinander verglichenen Formeln mittlere Fehler, die sich wie 1 : 5 verhalten. Zum Zwecke des Vergleichs wurden sie im Falle der Fig. A auf ein Anomalienfeld angewandt, in dem ausser dem Regionalanstieg nicht nur die gravimetrische Wirkung der interessierenden grossräumigen Struktur, sondern auch diejenige kleinräumiger Bauelemente vorhanden war; im Falle der Fig. B hingegen erfolgte eine Anwendung beider Formeln auf ein Anomalienfeld, aus dem die gravimetrische Wirkung einer kleinräumigen Struktur erkannt werden sollte. — Hiernach liegt es also in der Natur der Sache, dass die beiden Vergleichsergebnisse als einander entgegengesetzte Aussagen erscheinen.

3.4 Einige Hinweise zur routinemässigen Bearbeitung praktischer Messergebnisse.

Den Näherungsformeln für g_{zz}, die in den Abschnitten 3.1 und 3.2 diskutiert wurden, lag ein regelmässiges Sechseck-Gitter zugrunde. Die Verwendung eines solchen hat in der Praxis den Vorteil geringer Ablesearbeit, wie bereits in Abschn. 2.4 zum Ausdruck gebracht wurde. Ein weiterer Vorteil ist nunmehr dadurch gegeben, dass mit wenig zusätzlichem Arbeitsaufwand verschiedene Formeln aus Tab. 2 angewandt werden können, sobald die Summen aus (15) berechnet vorliegen. Auf diese Weise liesse sich in manchen Fällen ein Gewinn für die Interpretation der Messergebnisse erzielen, wenn geologische Bauelemente verschiedener räumlicher Erstreckung zu erwarten sind.

Auf Grund der theoretischen Überlegungen in Abschn. 2.3 ist die Verwendung eines regelmässigen Sechseckgitters nur bei solchen Formeln sinnvoll, für deren Herleitung die entsprechenden Polynome von der 4. Ordnung sind. Damit wird aber auch den Erfordernissen der Praxis normalerweise genügt werden können. — Nach den Ausführungen in 2.3 besitzen derartige Formeln „drehungsinvariante" Koeffizienten; die damit errechneten Werte von g_{zz} sind aber trotzdem abhängig von starren Drehungen der zugrunde liegenden Punktkonfiguration, was eine Folge der entsprechenden Abhängigkeit der $\dot{g}_n(r_j)$ ist. Will man diese Abhängigkeit des Ergebnisses von der Orientierung der Punktkonfiguration praktisch bedeutungslos machen, so kann das durch

eine Erhöhung der Punktezahl pro Kreis erreicht werden. Dann ist jedoch nicht mehr die Verwendung eines regelmässigen Gitternetzes möglich, so dass also der Arbeitsaufwand erheblich grösser wird.

Der Autor dankt Herrn Dr. Leo J. Peters von der Gulf Research and Development Company, Pittsburgh, P.A., U.S.A., verbindlichst für die Freigabe des Materials aus dem Los Angeles Basin. — Ebenso dankt er der Fa. PRAKLA, Gesellschaft für praktische Lagerstättenforschung G.m.b.H., Hannover, für die gewährte Förderung zur Durchführung der Untersuchung.

Literatur

1) Brown, jr., William Fuller, 1956, Minimum variance in gravity analysis, part II, Geophysics, Vol. 21, pp. 107-141.

2) Elkins, Thomas A., 1951, The second derivative method of gravity interpretation, Geophysics, Vol. 16, pp. 29-50.

3) Linsser, Helmut, 1955a, Ermittlung der zweiten Ableitung der Schwere durch Ausgleichungsrechnung. Vortrag, gehalten auf der Tagung der Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft am 27. 4. 1955 in München.

4) Linsser, Helmut, 1955b, Herabsetzung der Wirkung örtlicher Schwerestörungen auf die zweite Ableitung. Vortrag, gehalten auf der Tagung der EAEG am 20.5.1955 in Paris.

5) Rosenbach, Otto, 1953, A contribution to the computation of the "second derivative" from gravity data, Geophysics, Vol. 18, pp. 894-912.

6) Rosenbach, Otto, 1954, Quantitative studies concerning the vertical gradient and second derivative methods of gravity interpretation, Geophysical Prospecting, Vol. 2, pp, 128-138.

Discussion

V. Baranov (written discussion):

Le calcul de la seconde dérivée verticale est un problème très simple et déjà résolu. Cependant, la mise au point de Dr Rosenbach montre que certains détails continuent à présenter un intérêt et méritent attention. Je saisis donc cette occasion pour formuler quelques observations.

Dans le § 2.3. Dr. Rosenbach utilise le développement le g en une double série de Taylor au voisinage de l'origine P, pour représenter la valeur de g au point A (fig. 2) qui peut se trouver assez loin de P, par exemple, à une dizaine de kms. On peut se demander si un tel procédé est légitime. En effet, le champ g est théoriquement analytique. Mais pratiquement cette fonction ne doit pas être considérée comme analytique. Une anomalie, même intense, mais localisée dans la région du point A, ne se fait que faiblement sentir au point P. Son action à l'origine sera alors inférieure aux erreurs expérimentales. Par conséquent, il semble douteux qu'on puisse représenter l'anomalie au point A en

partant de l'origine. Il existe pourtant une méthode beaucoup plus simple, d'ailleurs bien connue, pour évaluer l'erreur qu'on commet en remplaçant l'intégrale par une somme. Je la rappelle ici brièvement.

La fonction $g(r, \varphi)$ est périodique sur le cercle de rayon constant; elle peut donc être développée en une série de Fourier

$$g(r, \varphi) = A_0 + \sum A_k \cos k\varphi + \sum B_k \sin k\varphi$$

d'où

$$\bar{g}(r) = \frac{1}{2\pi} \int g(r,\varphi)\, d\varphi = A_0$$

Prenons les angles φ_ν en progression arithmétique $\alpha + \frac{2\pi\nu}{N}$

et faisons la somme

$$g(r, \varphi_\nu) = NA_0 + \sum A_k \sum \cos k\varphi_\nu + \sum B_k \sum \sin k\varphi_\nu$$

Le calcul des sommes trigonométriques qui interviennent dans cette expression est très simple. On obtient le résultat suivant:

$$g(r) = g(r) - A_N \cos N\alpha - A_{2N} \cos 2N\alpha - \ldots$$
$$- B_N \sin N\alpha - B_{2N} \sin 2N\alpha - \ldots$$

On voit donc qu'en remplaçant $\bar{g}(r)$ par $\dot{g}(r)$ on néglige l'harmonique d'ordre N, — nombre de points de subdivision. L'amplitude de cet harmonique est $\sqrt{(A_N^2 + B_N^2)}$. Elle est indépendante de l'angle, c'est-à-dire de l'orientation des axes Oxy.

Il n'est d'ailleurs nullement indispensable de remplacer de cette façon l'intégrale par une somme. En effet, une fois le champ échantillonné à l'aide d'une grille quelconque, on peut tracer n'importe quelles droites et n'importe quels cercles passant ou ne passant pas par les points canoniques de la grille et calculer les intégrales et les dérivées avec une précision qui ne sera limitée que par le pas de la grille et par les erreurs expérimentales. Dans le § 2.4. Dr. Rosenbach a établi une douzaine de formules et a calculé l'erreur moyenne dont la valeur figure dans le tableau 2. Il est bien évident que ces valeurs ne sauraient caractériser la précision. Prenons, par exemple la formule VII. Elle comporte 12 termes et le coefficient de chaque terme est 1/3. Pour calculer l'erreur moyenne, on extrait la racine carrée de la somme des carrés des coefficients ce qui donne 1,15. Supposons maintenant qu'au lieu de prendre seulement six points sur chacun des deux cercles A et B, nous prenions un grand nombre N points. La formule devient:

$$g''_{zz} = \frac{2}{N} \sum_1^N g(A) - \frac{2}{N} \sum_1^N g(B)$$

Elle comporte $2N$ termes et les coefficients sont $2/N$. L'erreur moyenne devient $\sqrt{8/N}$. Elle tend donc vers zéro lorsque N augmente. Ceci est évidemment inexact.

Cette question de la précision du calcul de la seconde dérivée n'a pratiquement aucune importance. En effet, ce que nous cherchons, c'est à supprimer l'anomalie régionale et à accentuer les anomalies résiduelles, tout en évitant dans la mesure du possible d'exagérer l'influence des erreurs expérimentales. Une formule pratique est toujours un compromis entre ces tendances contradictoires. L. J. Peters et T. A. Elkins ont très bien souligné ce fait dans leur discussion avec Dr Rosenbach en 1953.

O. Rosenbach (reply):

Die Diskussion von Herrn Dr. Baranov ist sehr interessant, allerdings berührt sie nur wenig den eigentlichen Inhalt der Arbeit.

Die Verwendung eines Taylor-Polynoms als analytisches Bildungsgesetz von g bedeutet eine Extrapolation, die naturgemäss um so schlechter wird, je grösser $r = PA$, zumal wenn bei A noch eine lokale Anomalie vorhanden sein soll. Da die hierzu gehörigen Überlegungen in den §§ 2.2 und 2.3 $\dot{g}_n(r)$ betreffen, ist die Berechtigung dieses Ansatzes in gleicher Weise gegeben wie desjenigen für $\bar{g}(r)$ in (2), der sich mit ein wenig modifizierter Herleitung bereits bei Elkins findet. Im übrigen ist es für die formalen Entwicklungen der §§ 2.3 und 2.4 nicht wesentlich, ob sich eine lokale Anomalie in A von P aus in der angegebenen Weise genau darstellen lässt, denn das Ziel ist ja nicht eine möglichst gute Darstellung der „wahren" 2. Ableitung, die als Hilfsmittel bei der gravimetrischen Interpretation wohl keinen allzu grossen Dienst leisten würde. Vielmehr kommt es darauf an, brauchbare Näherungsformeln für die verschiedenartigen Aufgaben der Praxis zu ermitteln, was mit Hilfe des gewählten Ansatzes erreicht werden kann, wie Abschnitt 3 dieser Arbeit und weitere Ergebnisse zeigen.

Die von Herrn Dr. Baranov angegebene Methode zur Berechnung des Fehlers, den man bei der Ersetzung des Integrals durch eine Summe begeht, hat keine Beziehung zu den von mir angestellten Überlegungen, da ich auf diesen Fehler gar nicht eingegangen bin. Insbesondere hat die Unabhängigkeit der Amplitude der Harmonischen von der Ordnung N nichts mit der von mir diskutierten Drehungsinvarianz der Koeffizienten in dem Näherungspolynom für $\dot{g}_n(r)$ zu tun.

Weiterhin ist die Beanstandung hinfällig, dass der angegebene mittlere Fehler $\sqrt{8/N}$ mit wachsendem N gegen Null geht. In der von Herrn Dr. Baranov angegebenen Formel darf nämlich zwischen g_{zz} und der rechten Seite nicht das Zeichen $=$ stehen, sondern dort muss das Zeichen $\approx$ verwendet werden. Nunmehr gibt der mittlere Fehler im Sinne der Statistik den Einfluss der Fehler

der g-Werte auf die rechte Seite an; er wird auch „Funktionsfehler" genannt. Hieraus folgt, dass mit wachsendem N die rechte Seite gegen einen Ausdruck strebt, der aus dem vorliegenden dadurch entsteht, dass man $\dot{g}_N(A)$ bzw. $\dot{g}_N(B)$ durch $\bar{g}\,(A)$ bzw. $\bar{g}\,(B)$ ersetzt; dabei muss zwangsläufig der mittlere Fehler der rechten Formelseite mit wachsendem N gegen Null gehen. — Damit ist andererseits noch gar nichts über die Approximation des wahren Wertes von g_{zz} durch die rechte Seite der Formel ausgesagt.

Hiernach trifft offensichtlich auch nicht die von Herrn Dr. Baranov vertretene Meinung zu, dass die Arbeit die Frage nach der Genauigkeit der Berechnung der 2. Ableitung zum Gegenstand hat. Vielmehr verfolgen die Ausführungen in Abschnitt 3 gerade das Ziel, den mittleren Fehler einer Formel als gewisses quantitatives Charakteristikum heranzuziehen, und zwar in dem Sinne, ob die Formel evtl. den erwünschten Kompromiss zwischen den von Herrn Dr. Baranov treffend benannten gegenläufigen Tendenzen bei der praktischen Bearbeitung herbeiführen kann. Im übrigen erfolgten diese Überlegungen gerade mit Hinblick auf die Diskussionsbemerkung der Herren Dr. L. J. Peters und T. A. Elkins.